

最小情報従属モデルの地震カタログへの適用

矢野恵佑 (統計数理研究所),
清智也 (東京大学)

概要

本講演では、混合ドメインデータの (高次) 従属性解析のための統計モデルである最小情報従属モデル (Sei and Yano, 2024) の基本的な性質及び使い方を紹介し、その地震カタログへの適用結果を報告する。

1 最小情報従属モデル

各 $i = 1, \dots, d$ に対して $(\mathcal{X}_i, \mathcal{F}(\mathcal{X}_i), dx_i)$ を任意の測度空間としその直積を $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^d \mathcal{X}_i$ 及び $dx = \prod_{i=1}^d dx_i$ とおく。添え字 i に対して $-i$ という記法を i 番目の添え字を抜いた添え字全てに当てる、すなわち、 $x_{-i} = (x_j)_{j \neq i}$, $\mathcal{X}_{-i} = \prod_{j \neq i} \mathcal{X}_j$, 及び $dx_{-i} = \prod_{j \neq i} dx_j$. 各次元 $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_d$ の周辺分布を $r_1(x_1; \nu), \dots, r_d(x_d; \nu)$ とし、 ν を周辺分布のパラメータとする。

これらの準備のもと、最小情報従属モデルとは

$$p(x; \theta, \nu) = \exp \left(\theta^\top h(x) - \sum_{i=1}^d a_i(x_i; \theta, \nu) - \psi(\theta, \nu) \right) \prod_{i=1}^d r_i(x_i; \nu), \quad (1)$$

のように書ける確率密度の集まりのことである。ここで $\theta \in \mathbb{R}^K$ は従属性を表す K -次元のパラメータで、 $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^K$ は所与の関数とする。関数 $a_i(x_i; \theta, \nu)$ と $\psi(\theta, \nu)$ は以下の条件を満たすように定まる：

$$\int p(x; \theta, \nu) dx_{-i} = r_i(x_i; \nu), \quad i = 1, \dots, d, \text{ and} \quad (2)$$

$$\int \sum_{i=1}^d a_i(x_i; \theta, \nu) p(x; \theta, \nu) dx = 0. \quad (3)$$

2 気象庁カタログへの適用結果

最小情報従属モデルを用いて、メカニズム解と震源の深さの依存関係を解析する。この適用では、2021年の気象庁 CMT 解リスト (Japan Meteorological Agency, 2022) に掲載されている 158 個の地震を用いた。震源の深さごとの震源球を図 1(a) に表示している。この図から、メカニズム解と震源の深さの依存関係が定性的に確認される。そこで、最小情報従属モデルを用いて両者の依存関係の定量的な評価を試みる。まず、P 軸と T 軸を三次元空間上の直交枠 (直交する二つの軸) と捉える。すなわち、P 軸と T 軸のペアはシュティーフェル多様体の要素であるとする。震源の深さは実数値と捉える。次に、P 軸と T 軸 (P, T) と震源の深さ z に対する最小情報従属モデルとして

$$p(P, T, z | A, B, \nu) = \exp(\text{tr}(Ah^P(z, P)) + \text{tr}(Bh^T(z, T)) - c(z, P, T; A, B, \nu))$$

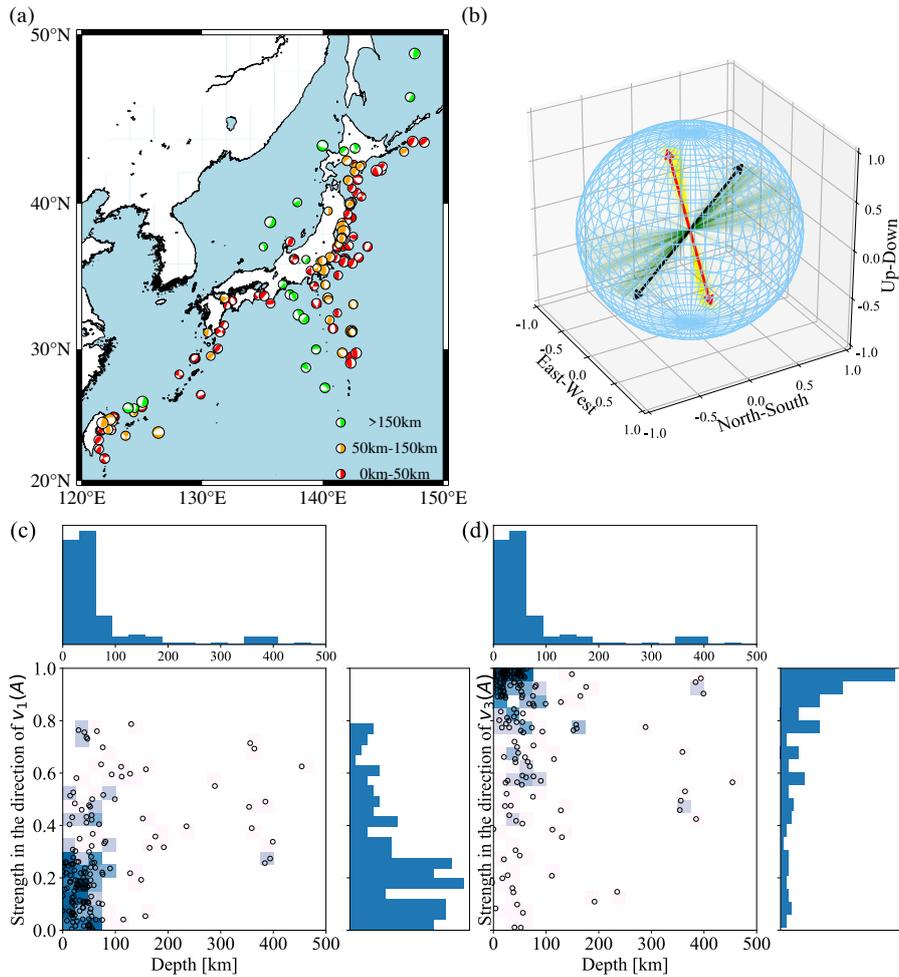


図1 メカニズム解と深さの依存関係 (a) 震源球のマッピング (b) A の第1固有ベクトルと第3固有ベクトル。第1固有ベクトルを赤い軸で表示し、そのばらつきを黄色く示している。第3固有ベクトルを黒い軸で表示し、そのばらつきを緑で示している。(c,d) A の第1(c)と第3(d)固有ベクトルの方向のP軸の大きさと震源の深さの2次元ヒストグラム。データそのものは黒丸で表示している。

という形をしたものを考える。ここで $h^P(z, P) := zPP^T$ 及び $h^T(z, T) := zTT^T$ であり、 A はP軸と深さの依存関係を表す未知の 3×3 の行列パラメータであり、 B はT軸と深さの依存関係を表す未知の 3×3 の行列パラメータである。 $A = B = 0$ を仮説検定することでメカニズム解と震源の深さの独立性の検定を行うことができる。さらに、 A を固有値分解し、その固有ベクトルを求めることによって、P軸と深さとの依存関係が最も大きくなるあるいは最も小さくなる方向を同定することができる。 B を固有値分解することによって同様の解析をT軸に関するものを行うことができる。

まず、 $A = B = 0$ を帰無仮説とする仮説検定の p -値は 0.02 となった。次に、データから推定されたP軸と深さの依存関係パラメータ A の固有ベクトルを図1 (b) に示す。ここでは、 A を第2固有値が0になるように変換し、第1固有ベクトル(固有値が正の方向)及び第3固有ベクトル(固有値が負の方向)を示している。赤色の軸は推定第1固有ベクトルであり、周囲の黄色の軸はそのばらつきを表す。黒色の軸は推定第3固有ベクトルであり、周囲の緑色の軸はそのばらつきを表す。P軸データの第1固有ベクトル方向成分の大きさと震

源の深さの 2 次元ヒストグラムを図 1 (c) に示す。P 軸データの第 3 固有ベクトル方向成分の大きさと深さデータの 2 次元ヒストグラムを図 1 (d) に示す。図 1 (c) のヒストグラムから、震源が深くなると P 軸の鉛直に近い成分が 0 に近い地震が少なくなることが見てとれる。

参考文献

- Japan Meteorological Agency (2022). The seismological bulletin of Japan.
https://www.data.jma.go.jp/svd/eqev/data/bulletin/index_e.html.
- Sei, T. and Yano, K. (2024). Minimum information dependence modeling. *Bernoulli* **30**, 2623–2643.