Minimaxity under the half-Cauchy prior

神戸大学・経営　丸山 祐造　　東京大学・計数 & 理研・CBS　松田 孟留

正規分布によるベイズ階層モデル

$$y \mid \beta \sim \mathcal{N}_p(\beta, I_p), \quad \beta \mid \kappa \sim \mathcal{N}_p\big(0, \frac{1-\kappa}{\kappa} I_p\big), \qquad \kappa \sim \pi(\kappa), \text{ for } \kappa \in (0,1)$$

を考える。Polson & Scott (2012, Bayesian Analysis) は，上記モデルにおけるベイズ推論で

$$\pi(\kappa) \propto \kappa^{-1/2}(1-\kappa)^{-1/2}$$

を推奨した。$\pi(\kappa)$ は $\lim_{\kappa\to 0}\pi(\kappa) = \lim_{\kappa\to 1}\pi(\kappa) = \infty$ を満たす U 字型であり，連続型の spike and slab prior と理解できる。また変数変換 $\lambda = \sqrt{1/\kappa - 1} \in (0, \infty)$ により，密度が

$$\pi(\lambda) \propto \frac{1}{1+\lambda^2} I_{(0,\infty)}(\lambda)$$

と変換されることが half-Cauchy prior と呼ばれる所以である。

さて $\beta \in \mathbb{R}^p$ の推定問題において，推定量の良さを平均二乗誤差で測るとき，MLE である y は $p \geq 3$ のとき非許容的である。Polson & Scott (2012) が half-Cauchy prior を推奨する根拠は，half-Cauchy prior のもとでのベイズ推定量

$$\hat{\beta}_{\mathrm{HC}} = \left(1 - \frac{\int_0^1 \kappa^{p/2+1/2}(1-\kappa)^{-1/2}\exp(-\kappa\|y\|^2/2)\mathrm{d}\kappa}{\int_0^1 \kappa^{p/2-1/2}(1-\kappa)^{-1/2}\exp(-\kappa\|y\|^2/2)\mathrm{d}\kappa}\right) y$$

が良い性質を持つことである。特に，彼らは $\hat{\beta}_{\mathrm{HC}}$ が MLE y を優越すること，つまり

$$E[\|\hat{\beta}_{\mathrm{HC}} - \beta\|^2] \leq E[\|y-\beta\|^2] = p \tag{$\star$}$$

を数値的に示唆した。本発表では以下のように，理論的に ($\star$) を示す。

定理　$p \geq 7$ のとき，half-Cauchy prior のもとでのベイズ推定量 $\hat{\beta}_{\mathrm{HC}}$ は y を優越する。

($\star$) であるための Stein's unbiased risk estimates に基づく十分条件は，

$$\frac{p-5}{2} + (p+3)\frac{M(-1/2, p/2+2, w)}{M(1/2, p/2+2, w)} - \frac{p+1}{2}\frac{M(-1/2, p/2+1, w)}{M(1/2, p/2+1, w)} \geq 0 \text{ for all } w \geq 0 \tag{$\star\star$}$$

で与えられる。ただし，$M(b, c, w)$ は合流型超幾何関数

$$M(b,c,w) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b\cdots(b+i-1)}{c\cdots(c+i-1)}\frac{w^i}{i!}.$$

である。定理の証明においては，($\star\star$) に登場する合流型超幾何関数の比を

$$\frac{M(-1/2, p/2+2, w)}{M(1/2, p/2+2, w)} \geq -\frac{1}{5} \text{ for } p \geq 11$$

のように下から抑えることが肝要である。その際に，区間演算により精度保証をして，厳密に不等式が成立することを確認する。我々の知る限り，統計的決定理論・数理統計学において，区間演算を用いた証明は見当たらず，その点においても新規性があると考える。