

# 一般化 mixture sampler を用いた stochastic volatility in mean model の推定

## Stochastic Volatility in Mean: Efficient Analysis by a Generalized Mixture Sampler

平木 大智 (東京大学経済学研究科)  
Siddhartha Chib (ワシントン大学)  
大森 裕浩 (東京大学経済学研究科)

2024 年 9 月 24 日

### 1 背景

金融時系列データにおいて、不安定な（変動が大きい）時期が持続する、同様に安定な（変動の小さい）時期が持続する現象が見られ、これはボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる。このような時間変化するボラティリティを描写するモデルとして stochastic volatility (SV) model がよく知られている。

一方、金融時系列データに見られるもう一つの現象として、ボラティリティの大きな時期に期待されるリターンが大きくなるというものが挙げられる。経済主体がリスク回避的であることに起因するこの現象はリスクプレミアムと呼ばれ、ボラティリティ・クラスタリングに加えてこの現象を描写するモデルとして提案されたのが stochastic volatility in mean (SVM) model である。[3] により提案された SVM モデルは、現在ではファイナンスやマクロ経済学をはじめとする分野で用いられている。

### 2 課題

SVM モデルは次の非線形状態空間モデルにより記述される。

$$y_t = \beta \exp(h_t/2) + \epsilon_t \exp(h_t/2), \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right), \quad (4)$$

ここで、 $\{y_t\}$  は観測される金融時系列データ（主にリターン）、 $\{h_t\}$  は対数ボラティリティと呼ばれる潜在変数、 $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ 、 $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$  は誤差を決定する時間を通じて独立な確率変数、 $\theta = (\mu, \phi, \sigma^2, \beta)$  はパラメータである。 $\{h_t\}$  は観測方程式 (1) における誤差項の分散を決定し、 $\{h_t\}$  自体が AR(1) 過程に従うこと

でボラティリティ・クラスタリングを表現する。さらに、 $h_t$  を所与としたときリターン  $y_t$  の期待値（期待リターン）は  $\beta \exp(h_t/2)$  となり、 $\beta$  が正であるとき期待リターンは  $h_t$  についての増加関数となる。これによりボラティリティが大きい時期に期待リターンが大きくなるリスクプレミアムを説明する。

このモデルのパラメータを推定するには、一般の SV モデル同様、 $\{h_t\}$  について周辺化する必要があり容易ではない。そのため MCMC サンプリングベースのベイズ推定を行うことが考えられるが、観測方程式 (1) が  $h_t$  について非線形であることから効率的な (MCMC サンプルの標本自己相関が小さい) サンプリングを行うことが難しい。そのため、従来は各  $t$  について  $h_t$  以外の潜在変数  $h_{-t}$ 、パラメータ  $\theta$  を固定して  $h_t$  をサンプリングする single-move sampler や、 $\{h_t\}$  をいくつかのブロックに分けてサンプリングを行う multi-move sampler を用いるのが主流であった。しかしこれらの手法は、MCMC が非効率的である、もしくは効率的なサンプリングを達成するためにハイパーパラメータチューニングが必要であるといった問題がある。

### 3 提案手法

SVM モデルのパラメータ推定を非効率的にする原因は、観測方程式 (1) が  $h_t$  について非線形であることである。よって、(1) を

$$y_t^* = h_t + \epsilon_t^*, \quad y_t^* = \log(y_t^2), \quad \epsilon_t^* = \log(\beta + \epsilon_t)^2, \quad (5)$$

の形に変形することで  $h_t$  について線形な形にする。これにより非線形性の問題は解決するが、誤差項  $\epsilon_t^*$  は正規分布に従わない。ゆえに事後分布が簡単な形で表されず、引き続き効率的なパラメータ推定は困難である。

誤差項  $\epsilon_t^*$  は自由度 1、非心パラメータ  $\beta^2$  の非心カイ二乗分布に従う確率変数の対数変換で与えられ、 $\log \chi_1^2(\beta^2)$  に従う。本研究における提案手法である一般化 mixture sampler は、この誤差項  $\epsilon_t^*$  を混合正規分布の形で近似する。データ拡大法を用いることで、元の非線形状態空間モデルである SVM モデルを線形ガウス型状態空間モデルで近似することができ、カルマンフィルタ・カルマンスムーザベースのサンプリングにより効率的なパラメータ推定が可能である。

本研究では  $\log \chi_1^2(\beta^2)$  の確率密度関数  $f(\epsilon_t^*|\beta)$  を次で近似する。

$$f(\epsilon_t^*|\beta) \approx \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=0}^J \tilde{p}_{i,j} v_i^{-1} \phi\left(\frac{u - \tilde{m}_{i,j}}{v_i}\right), \quad (6)$$

$$\tilde{p}_{i,j} = \frac{p_i \exp\left(m_i j + \frac{j^2 v_i^2}{2}\right) \frac{1}{2^j j! \Gamma(1/2+j)} \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^j}{\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=0}^J p_i \exp\left(m_i j + \frac{j^2 v_i^2}{2}\right) \frac{1}{2^j j! \Gamma(1/2+j)} \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^j}, \quad \tilde{m}_{i,j} = m_i + j v_i^2.$$

ここで、 $p_i$ 、 $m_i$ 、 $v_i^2$  は [2] や [4] により導入された定数、 $J$  は任意の自然数であり、本研究では  $J = 2$  をとる。これは、30 個の正規分布の混合分布により  $\log \chi_1^2(\beta^2)$  の分布を近似していることを表している。

図 (1) は真の  $\log \chi_1^2(\beta^2)$  の確率密度関数と、30 個の正規分布の混合分布による近似である。2つの曲線はほとんど重なっており、先行研究で推定されているようなパラメータの値  $|\beta| < 1$  において提案手法が真の分布を高い精度で近似していることがわかる。

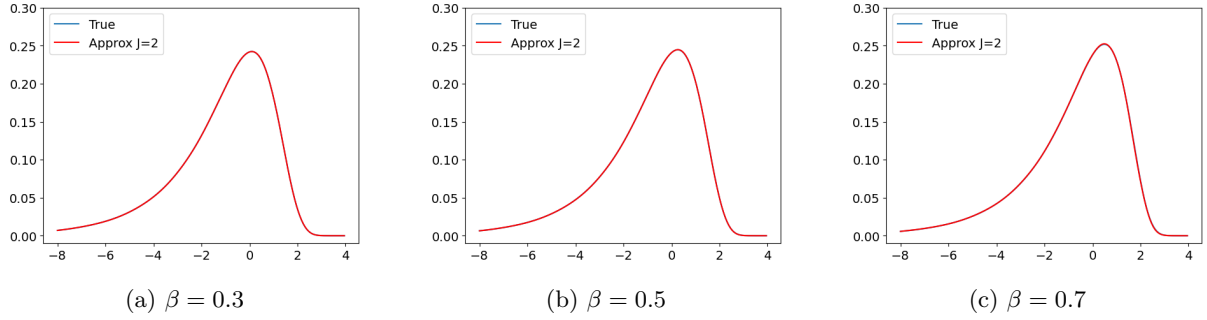


図 1: True and approximation densities of  $\log \chi_1^2(\beta^2)$  for  $\beta = 0.3, 0.5$  and  $0.7$ .

## 4 シミュレーション実験結果

一般化 mixture sampler を用いて事後分布を推定した結果を、表 (1) に記す。データの大きさを  $n = 1,000$  とし、各パラメータの値は表中の "True" の値に設定した。特に、 $\beta = 0.3$  と設定している。事前分布は

$$\begin{aligned} \mu &\sim N(0, 1000^2), & \frac{\phi + 1}{2} &\sim \text{Beta}(1, 1), \\ \sigma^2 &\sim \text{IG}\left(\frac{0.001}{2}, \frac{0.001}{2}\right), & \beta &\sim N(0, 1). \end{aligned}$$

とした。

Par	True	Mean	Std Dev	95% interval	IF
$\mu$	0	0.090	0.319	(-0.575, 0.725)	17
$\phi$	0.97	0.971	0.011	(0.948, 0.989)	15
$\sigma$	0.3	0.259	0.037	(0.195, 0.338)	13
$\beta$	0.3	0.315	0.033	(0.251, 0.380)	1
$h_{250}$	2.310	1.735	0.460	(0.843, 2.647)	5
$h_{750}$	2.077	1.674	0.412	(0.900, 2.520)	5

表 1: MCMC によるパラメータの推定結果。真の値 (True)、事後平均 (Mean)、事後分布の標準偏差 (Std Dev)、95% 信用区間 (95% interval)、非効率性因子 (IF)。

表 1 より、事後平均は概ね真の値を捉えていることがわかる。また、全体的に非効率性因子 (IF) の値は小さく、特に対数ボラティリティ  $h_t$  の IF が小さく、一般化 mixture sampler がうまく働いていることがわかる。同様の結果は  $|\beta|$  の値がより大きくなっても確認され、一般化 mixture sampler が実データで観測されるような  $\beta$  の値に対して適用可能であることが示唆された。

## 5 実証実験

SVM モデルは観測方程式 (1) において、期待リターンを  $\beta \exp(h_t/2)$  とし、これによりリスクプレミアムを特徴づけた。しかし、従来の研究では期待リターンは別の形で定式化がされているものもある。ここでは期待リターンを  $\beta \exp(h_t)$ 、 $\beta h_t$  で定義したものをそれぞれ SVM II、SVM III モデルと呼ぶ。すなわち、SVM

II モデルではリスクプレミアムが観測方程式 (1) における誤差項の分散について線形、SVM III モデルでは  $h_t$  それ自体について線形であるというモデルである。

実証分析においては、さらに観測方程式と状態方程式の誤差項の間に相関  $\rho$  を許す SVM with leverage (SVML) モデルを考える。この  $\rho < 0$  は、収益率  $y_t$  が減少すると次の期のボラティリティが上昇する「レバレッジ効果」や「非対称性」と呼ばれる現象を説明するパラメータである。実証研究に用いたデータは米国金利利回りの2つの金融時系列データ (TB と DGS) である。

表 2 は SVML モデル (リスクプレミアムを  $\beta \exp(h_t/2)$  と設定) についての、TB と DGS の MCMC を用いたパラメータ推定結果である。AR(1) 係数  $\phi$  が 1 に近いことからボラティリティ・クラスタリングの存在が示唆される他、 $\beta > 0$  の事後確率が 1.000 であることは正のリスクプレミアムが存在することを示唆している。TB については  $\rho < 0$  の事後確率が 1.000 であることからレバレッジ効果が存在すると考えられる。

Par	Mean	Std Dev	95% interval	IF	Pr(+)
$\mu$	-1.882	0.623	(-3.163, -0.656)	109	0.003
	-3.824	0.641	(-5.053, -2.319)	130	0.000
$\phi$	0.920	0.024	( 0.867, 0.961)	72	1.000
	0.901	0.040	( 0.815, 0.965)	156	1.000
$\sigma$	0.690	0.099	( 0.519, 0.911)	105	1.000
	0.923	0.130	( 0.696, 1.200)	175	1.000
$\rho$	-0.544	0.139	(-0.790, -0.253)	116	0.000
	0.062	0.132	(-0.203, 0.313)	151	0.672
$\beta$	0.651	0.074	( 0.507, 0.797)	45	1.000
	0.735	0.075	( 0.589, 0.881)	52	1.000

表 2: MCMC による推定結果。TB (上段) と DGS (下段)。

表 3 は上記の各 SVM モデルとリスクプレミアムを含まない基本的な SV モデルを周辺尤度の対数で比較したものである。太字が周辺尤度最大となったモデルであり、TB と DGS においては SVM モデル、もしくは SVML モデルが支持される結果となった。

Model	TB	DGS
SVM	-185.636(0.156)	<b>66.390(0.109)</b>
SVML	<b>-178.409(0.111)</b>	<b>66.616(0.122)</b>
SVM II	-211.910(0.072)	52.084(0.046)
SVML II	-203.926(0.064)	49.823(0.046)
SVM III	-215.386(0.049)	38.438(0.055)
SVML III	-205.118(0.052)	39.304(0.046)
SV	-224.784(0.090)	21.126(0.122)
SVL	-214.247(0.195)	22.549(0.060)

表 3: 周辺尤度の対数。TB と DGS。

## 6 結果・考察

本研究では、非線形状態空間モデルである SVM モデルを線形ガウス型状態空間モデルの表現を用いて近似することで効率的なサンプリングを可能とした。この近似において重要となる点は  $\log \chi_1^2(\beta^2)$  分布の混合正規分布での近似であり、重みがパラメータ  $\beta$  に依存する 30 個の正規分布を用いた。一般化 mixture sampler と称されるこの手法の効率性はシミュレーション実験において確認された。実証実験においては、米国金利回りのデータ (TB・DGS) について、観測方程式の標準偏差について線形なリスクプレミアムをもつ SVM モデルが支持されるという結果となった。

SVM モデルの拡張として、多変量 SVM モデルへの拡張が挙げられる。また、本研究ではリスクプレミアムとして  $\beta \exp(h_t/2) \cdot \beta \exp(h_t) \cdot \beta h_t$  の 3 つを考えたが、必ずしもこれらの関数に限られるわけではない。実際リスクプレミアムと分散 (標準偏差) との関係は、[1] において研究されており、 $h_t$  について単調増加とは限らないリスクプレミアムの存在が示唆されている。最後に、本研究で扱われる SVM モデルは、あたかもエージェントが今期の対数ボラティリティ  $h_t$  を知っているもつてリスクプレミアム  $\beta \exp(h_t/2)$  が決定されるようである。しかし、実際にはエージェントにとってこの値は未知である。ゆえに前期の情報集合を  $\mathcal{I}_{t-1}$  とし、リスクプレミアムを  $\beta E[\exp(h_t/2)|\mathcal{I}_{t-1}]$  で定義するモデルが考えられる。

## 参考文献

- [1] D. K. Backus and A. W. Gregory. Theoretical relations between risk premiums and conditional variances. *Journal of Business Economic Statistics*, 11(2):177–185, 1993.
- [2] S. Kim, N. Shephard, and S. Chib. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with arch models. *The review of economic studies*, 65(3):361–393, 1998.
- [3] S. J. Koopman and E. Hol Uspensky. The stochastic volatility in mean model: empirical evidence from international stock markets. *Journal of applied Econometrics*, 17(6):667–689, 2002.
- [4] Y. Omori, S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima. Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference. *Journal of Econometrics*, 140(2):425–449, 2007.