多標本問題における 2-step 単調欠測データの下での平均ベクトルの同等性検定の検出力について

神戸大学・理・院　勝又　真
神戸大学・理・院　首藤　信通

1　はじめに

本報告においては, k 個の p 変量正規母集団から得られた 2-step 単調欠測データの下で, 平均ベクトルの同等性検定

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{\mu}^{(k)} \text{ vs. } H_1 : \boldsymbol{\mu}^{(s)} \neq \boldsymbol{\mu}^{(t)} \text{ for some } (s, t)$$

について議論する．ただし, $\boldsymbol{\mu}^{(g)}$ は第 g 母集団の平均ベクトルとする.

2-step 単調欠測データの場合, 1 標本問題における平均ベクトルと分散共分散行列の最尤推定量の分布特性が, Kanda and Fujikoshi (1998) によって与えられている．また, 2-step 単調欠測データの下での平均ベクトルの仮説検定は Chang and Richards (2009) によって, 分散共分散行列の仮説検定は Chang and Richards (2010) によってそれぞれ議論されている.

本報告では, k 個の母集団の分散共分散行列が等しい下で, 2-step 単調欠測データの場合における帰無仮説 H_0 に対する尤度比検定統計量を与える．また, 得られた検定統計量について, 検出力の数値的評価を与える.

2　最尤推定量の導出

第 g 母集団 $\Pi^{(g)} : N_p(\boldsymbol{\mu}^{(g)}, \Sigma)$ $(g = 1, \ldots, k)$ からそれぞれ $N_1^{(g)}$ 個の p 次元標本ベクトル $\boldsymbol{x}_j^{(g,1)} = \left(\boldsymbol{x}_{1j}^{(g,1)\prime}, \boldsymbol{x}_{2j}^{(g,1)\prime}\right)'$ $(j = 1, \ldots, N_1^{(g)})$, $N_2^{(g)}(= N^{(g)} - N_1^{(g)})$ 個の p_1 次元標本ベクトル $\boldsymbol{x}_{1j}^{(g,2)}(j = 1, \ldots, N_2^{(g)})$ が観測されたとする．ただし, $p > p_1$ である．ここで, $\boldsymbol{x}_{ij}^{(g,1)}$ は $\boldsymbol{x}_j^{(g,1)}$ の p_i 次元分割ベクトル $(i = 1, 2)$ であり, 平均ベクトル, 分散共分散行列についても, $\boldsymbol{x}_j^{(g,1)}$ の分割に対応して

$$\boldsymbol{\mu}^{(g)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1^{(g)} \\ \boldsymbol{\mu}_2^{(g)} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

を考える．ここに $\boldsymbol{\mu}_i^{(g)}$ は $\boldsymbol{\mu}^{(g)}$ の p_i 次元分割ベクトル $(i = 1, 2)$ であり, $p_2 = p - p_1$ である．また, Σ_{ij} は Σ の $p_i \times p_j$ 分割行列 $(i = 1, 2, j = 1, 2)$ である．ここで, 最尤推定量を求めるためにパラメータ $\left\{\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \Sigma\right\}$ と 1 対 1 対応するパラメータ $\left\{\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \Delta\right\}$ への変換を考える．ここに

$$\boldsymbol{\eta}^{(g)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{(g)} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{(g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1^{(g)} \\ \boldsymbol{\mu}_2^{(g)} - \Delta_{21}\boldsymbol{\mu}_1^{(g)} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \Sigma_{22\cdot 1} \end{pmatrix},$$

$\Sigma_{22\cdot 1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ である. これにより, 本報告で扱う仮説検定問題は

$$H_{01} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{\eta}^{(k)} \text{ vs. } H_{11} : \boldsymbol{\eta}^{(s)} \neq \boldsymbol{\eta}^{(t)} \text{ for some } (s, t)$$

と書き換えることができる. 以後, 帰無仮説 H_{01} に対する尤度比検定統計量の導出を行う.

Lemma 1. $\boldsymbol{a}$ を p 次元ベクトル, $\boldsymbol{b}$ を p 次元ベクトル, C を p 次正方行列, D を p 次正方行列, $\Delta_{ij}(=\Delta'_{ji})$ を $p_i \times p_j$ 行列, $W_{ij}(=W'_{ji})$ を $p_i \times p_j$ 行列とする. このとき, 以下がそれぞれ成り立つ.

(i) $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})'C(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = -2C(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial C}\log|C| = C$,

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial C}\mathrm{tr}(CD) = D$,

(iv) $\dfrac{\partial}{\partial \Delta_{21}}\mathrm{tr}(\Delta_{21}W_{12}) = W_{21}$,

(v) $\dfrac{\partial}{\partial \Delta_{21}}\mathrm{tr}(W_{21}\Delta_{12}) = W_{21}$,

(vi) $\dfrac{\partial}{\partial \Delta_{21}}\mathrm{tr}(\Delta_{21}W_{11}\Delta_{12}) = 2\Delta_{21}W_{11}$.

ただし

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{b}} = \left(\frac{\partial}{\partial b_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial b_p}\right)', \ \frac{\partial}{\partial C} = \left(\quad \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \quad \right) \ (i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, p),$$
$$\frac{\partial}{\partial \Delta_{21}} = \left(\quad \frac{\partial}{\partial \delta_{ij}} \quad \right) \ (i = 1, \ldots, p_2, j = 1, \ldots, p_1),$$

c_{ij} は C の (i, j) 成分, δ_{ij} は Δ_{21} の (i, j) 成分である.

Lemma1 を利用することにより, 以下の定理が導かれる.

Theorem 1. 対立仮説 H_{11} の下での $\{\boldsymbol{\eta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\eta}^{(k)},\Delta\}$ の最尤推定量 $\{\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(1)},\ldots,\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(k)},\hat{\Delta}\}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(g)}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\eta}}_1^{(g)}\\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_2^{(g)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{N_1^{(g)}}{N^{(g)}}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}+\dfrac{N_2^{(g)}}{N^{(g)}}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}\\ \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\hat{\Delta}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}\end{pmatrix}\ (g=1,\ldots,k),$$

$$\hat{\Delta}=\begin{pmatrix}\hat{\Delta}_{11}&\hat{\Delta}_{12}\\ \hat{\Delta}_{21}&\hat{\Delta}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{N}\left(W_{11}^{(\cdot,1)}+W^{(\cdot,2)}\right)&\left(W_{11}^{(\cdot,1)}\right)^{-1}W_{12}^{(\cdot,1)}\\ W_{21}^{(\cdot,1)}\left(W_{11}^{(\cdot,1)}\right)^{-1}&\dfrac{1}{N_1}W_{22\cdot1}^{(\cdot,1)}\end{pmatrix}$$

である．ここに $\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,i)}=N_i^{(g)^{-1}}\sum_{j=1}^{N_i^{(g)}}\boldsymbol{x}_{1j}^{(g,i)}\ (i=1,2),\ \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}=N_1^{(g)^{-1}}\sum_{j=1}^{N_1^{(g)}}\boldsymbol{x}_{2j}^{(g,1)}$ であり, また

$$\begin{aligned}
W^{(\cdot,1)}&=\begin{pmatrix}W_{11}^{(\cdot,1)}&W_{12}^{(\cdot,1)}\\ W_{21}^{(\cdot,1)}&W_{22}^{(\cdot,1)}\end{pmatrix}=\sum_{g=1}^{k}n_1^{(g)}S^{(g,1)},\\
W^{(\cdot,2)}&=\sum_{g=1}^{k}n_2^{(g)}S^{(g,2)}+\sum_{g=1}^{k}\left\{\frac{N_1^{(g)}N_2^{(g)}}{N^{(g)}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}\right)'\right\},\\
W_{22\cdot1}^{(\cdot,1)}&=W_{22}^{(\cdot,1)}-W_{21}^{(\cdot,1)}\left(W_{11}^{(\cdot,1)}\right)^{-1}W_{12}^{(\cdot,1)},\\
S^{(g,1)}&=\frac{1}{n_1^{(g)}}\sum_{j=1}^{N_1^{(g)}}\left(\boldsymbol{x}_j^{(g,1)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{(g,1)}\right)\left(\boldsymbol{x}_j^{(g,1)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{(g,1)}\right)',\\
S^{(g,2)}&=\frac{1}{n_2^{(g)}}\sum_{j=1}^{N_2^{(g)}}\left(\boldsymbol{x}_{1j}^{(g,2)}-\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}\right)\left(\boldsymbol{x}_{1j}^{(g,2)}-\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}\right)',\\
\bar{\boldsymbol{x}}^{(g,1)}&=\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)'},\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)'}\right)',
\end{aligned}$$

$n_1^{(g)}=N_1^{(g)}-1,\ n_2^{(g)}=N_2^{(g)}-1,\ N=N_1+N_2,\ N_1=\sum_{g=1}^{k}N_1^{(g)},\ N_2=\sum_{g=1}^{k}N_2^{(g)}$ である．

証明．直接尤度を用いた対立仮説 H_{11} の下での対数尤度関数 $\log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\eta}^{(k)},\Delta)$ は

$$\log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\eta}^{(k)},\Delta)=-\frac{1}{2}(pN_1+p_1N_2)\log2\pi+\log L_1+\log L_2$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}\log L_1 =&\frac{1}{2}N\log|\Delta_{11}^{-1}|\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{11}^{-1}\sum_{g=1}^{k}\left\{n_1^{(g)}S_{11}^{(g,1)}+n_2^{(g)}S^{(g,2)}\right\}\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{11}^{-1}\sum_{g=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{2}N_j^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)}-\boldsymbol{\eta}_1^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)}-\boldsymbol{\eta}_1^{(g)})'\right\},\\ \log L_2 =&\frac{1}{2}N_1\log|\Delta_{22}^{-1}|\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{22}^{-1}\left\{W_{22}^{(\cdot,1)}-\Delta_{21}W_{12}^{(\cdot,1)}-W_{21}^{(\cdot,1)}\Delta_{12}+\Delta_{21}W_{11}^{(\cdot,1)}\Delta_{12}\right\}\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{22}^{-1}\sum_{g=1}^{k}\left\{N_1^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\boldsymbol{\eta}_2^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\boldsymbol{\eta}_2^{(g)})'\right\}\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\eta}^{(k)},\Delta)}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^{(g)}} =&\Delta_{11}^{-1}(N_1^{(g)}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}+N_2^{(g)}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)}-N^{(g)}\boldsymbol{\eta}_1^{(g)}),\\ \frac{\partial\log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\eta}^{(k)},\Delta)}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^{(g)}} =&N_1^{(g)}\Delta_{22}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\boldsymbol{\eta}_2^{(g)}).\end{aligned}$$

よって $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1^{(g)},\hat{\boldsymbol{\eta}}_2^{(g)}$ はそれぞれ

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_1^{(g)}=\frac{N_1^{(g)}}{N^{(g)}}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}+\frac{N_2^{(g)}}{N^{(g)}}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,2)},\quad \hat{\boldsymbol{\eta}}_2^{(g)}=\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\hat{\Delta}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}$$

となる．

$$\begin{aligned}\log L^{(g)} =&\frac{N^{(g)}}{2}\log|\Delta_{11}^{-1}|+\frac{N_1^{(g)}}{2}\log|\Delta_{22}^{-1}|-\frac{1}{2}(pN_1^{(g)}+p_1N_2^{(g)})\log 2\pi\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{11}^{-1}\left(n_1^{(g)}S_{11}^{(g,1)}+n_2^{(g)}S^{(g,2)}\right)\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{11}^{-1}\sum_{j=1}^{2}N_j^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)}-\boldsymbol{\eta}_1^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)}-\boldsymbol{\eta}_1^{(g)})'\\&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Delta_{22}^{-1}\left(W_{22}^{(g,1)}-\Delta_{21}W_{12}^{(g,1)}-W_{21}^{(g,1)}\Delta_{12}+\Delta_{21}W_{11}^{(g,1)}\Delta_{12}\right)\\&-\frac{N_1^{(g)}}{2}\mathrm{tr}\Delta_{22}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\boldsymbol{\eta}_2^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)}-\Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}-\boldsymbol{\eta}_2^{(g)})'\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L^{(g)}}{\partial \Delta_{11}^{-1}} =& \frac{1}{2}\Bigg(N^{(g)}\Delta_{11} - n_1^{(g)} S_{11}^{(g,1)} - n_2^{(g)} S^{(g,2)} \\ & - \sum_{j=1}^{2} N_j^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1^{(g)})' \Bigg).\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \Delta)}{\partial \Delta_{11}^{-1}} =& \sum_{g=1}^{k} \frac{\partial \log L^{(g)}}{\partial \Delta_{11}^{-1}} \\ =& \frac{1}{2}\Bigg(N\Delta_{11} - W_{11}^{(\cdot,1)} - \sum_{g=1}^{k} \Bigg\{ n_2^{(g)} S^{(g,2)} \\ & + \sum_{j=1}^{2} N_j^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1^{(g)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1^{(g)})' \Bigg\} \Bigg)\end{aligned}$$

となるので

$$\hat{\Delta}_{11} = \frac{1}{N} \left(W_{11}^{(\cdot,1)} + W^{(\cdot,2)} \right)$$

を得る． $\dfrac{\partial \log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \Delta)}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^{(g)}} = \mathbf{0}$ を満たす解が $\boldsymbol{\eta}_2^{(g)} = \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \Delta_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)}$ であることに注意して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \Delta)}{\partial \Delta_{22}^{-1}} &= O, \\ \dfrac{\partial \log L(\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \Delta)}{\partial \Delta_{21}} &= O \end{cases}$$

を解けば

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{21} =& W_{21}^{(\cdot,1)} \left(W_{11}^{(\cdot,1)} \right)^{-1} = \hat{\Delta}_{12}', \\ \hat{\Delta}_{22} =& \frac{1}{N_1} \left\{ W_{22}^{(\cdot,1)} - W_{21}^{(\cdot,1)} \left(W_{11}^{(\cdot,1)} \right)^{-1} W_{12}^{(\cdot,1)} \right\}\end{aligned}$$

が得られる． □

また, 帰無仮説 H_{01} の下での対数尤度関数 $\log L(\boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\eta}, \Delta)$ は

$$\log L(\boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\eta}, \Delta) = -\frac{1}{2}(pN_1 + p_1N_2)\log 2\pi + \log L_1' + \log L_2'$$

となる. ただし

$$
\begin{aligned}
\log L_1' =& \frac{1}{2} N \log |\Delta_{11}^{-1}| \\
& - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \Delta_{11}^{-1} \sum_{g=1}^{k} \left\{ n_1^{(g)} S_{11}^{(g,1)} + n_2^{(g)} S^{(g,2)} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \Delta_{11}^{-1} \sum_{g=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{2} N_j^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1)(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,j)} - \boldsymbol{\eta}_1)' \right\}, \\
\log L_2' =& \frac{1}{2} N_1 \log |\Delta_{22}^{-1}| \\
& - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \Delta_{22}^{-1} \left\{ W_{22}^{(\cdot,1)} - \Delta_{21} W_{12}^{(\cdot,1)} - W_{21}^{(\cdot,1)} \Delta_{12} + \Delta_{21} W_{11}^{(\cdot,1)} \Delta_{12} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \Delta_{22}^{-1} \sum_{g=1}^{k} \left\{ N_1^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \Delta_{21} \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \boldsymbol{\eta}_2)(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \Delta_{21} \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \boldsymbol{\eta}_2)' \right\},
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\eta} = \left(\boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_2' \right)'$, $\boldsymbol{\eta}_i$ は $\boldsymbol{\eta}$ の p_i 次元分割ベクトルである. これにより, 同様に以下の系が成り立つ.

Corollary 1. 帰無仮説 H_{01} の下での $\{\boldsymbol{\eta}, \Delta\}$ の最尤推定量 $\{\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\Delta}\}$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1 =& \frac{1}{N} (\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,2)}), \ \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2 = \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)} - \tilde{\Delta}_{21} \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)}, \\
\tilde{\Delta}_{11} =& \hat{\Delta}_{11} + \frac{1}{N} \sum_{g=1}^{k} \frac{1}{N^{(g)}} (\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,2)})(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,2)})' \\
& - \frac{1}{N^2} (\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,2)})(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,2)})', \\
\tilde{\Delta}_{12} =& \left(W_{11}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})' \right)^{-1} \\
& \times \left(W_{12}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})' \right), \\
\tilde{\Delta}_{21} =& \left(W_{21}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})' \right) \\
& \times \left(W_{11}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)} (\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})' \right)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{22} =& \frac{1}{N_1}\Bigg\{\left(W_{22}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})'\right) \\
&- \left(W_{21}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})'\right) \\
&\times \left(W_{11}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})'\right)^{-1} \\
&\times \left(W_{12}^{(\cdot,1)} + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)})(\bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)})'\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

である.

3 尤度比検定統計量

尤度比を

$$
\Lambda = \frac{L\left(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\Delta}\right)}{L\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(2)}, \ldots, \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(k)}, \hat{\Delta}\right)}
$$

とすると, 尤度比検定統計量 $-2\log\Lambda$ は

$$
\begin{aligned}
-2\log\Lambda =& N\log\Bigg\{1 + \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{k}\frac{1}{N^{(g)}}\left(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,2)}\right)'\hat{\Delta}_{11}^{-1}\left(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(g,2)}\right) \\
&- \frac{1}{N^2}\left(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,2)}\right)'\hat{\Delta}_{11}^{-1}\left(\boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} + \boldsymbol{x}_{1\cdot}^{(\cdot,2)}\right)\Bigg\} \\
&+ N_1\log\left\{1 + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)}\end{pmatrix}'\left(W^{(\cdot,1)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{2\cdot}^{(\cdot,1)}\end{pmatrix}\right\} \\
&- N_1\log\left\{1 + \sum_{g=1}^{k} N_1^{(g)}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)}\right)'\left(W_{11}^{(\cdot,1)}\right)^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(g,1)} - \bar{\boldsymbol{x}}_{1\cdot}^{(\cdot,1)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

である. この尤度比検定統計量は, 大標本漸近枠組み, 帰無仮説 H_{01} の下で漸近的に自由度 $p(k-1)$ のカイ二乗分布に従う.

4 数値実験

本報告では, 提案する統計量の評価をするために, 検定統計量の検出力についてモンテカルロ・シミュレーションによる数値的結果を示す. 具体的にはさまざまな次元数, 標本サイズ, 有意水準 α の下で, 尤度比検定統計量の棄却限界値 c_α を求めた上で, c_α を用いた仮説検定方式の検出力を数値的に比較する.

参考文献

[1] Chang, W. -Y. and Richards, D. St. P. (2009). Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data, I. *J. Multivariate Anal.*, **100**, 1883 − 1899.

[2] Chang, W. -Y. and Richards, D. St. P. (2010). Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data, II. *J. Multivariate Anal.*, **101**, 603 − 620.

[3] Kanda, T. and Fujikoshi, Y. (1998). Some basic properties of the MLE's for a multivariate normal distribution with monotone missing data. *Amer. J. Math. Management Sci.*, **18**, 161 − 190.