ガンマ分布の形状パラメータのベイズ推定

東京大学経済学部　　　入江　薫

ガンマ分布の形状パラメータの推測は、尤度がガンマ関数の逆数（の累乗）を含むため困難である。MCMC を用いたベイズ推測においては、ガンマ関数の逆数を含むような密度を持つ完全条件付き事後分布からの乱数発生が必要となる。本講演では、この問題に対する三つのアプローチを紹介する。第一に、乱数発生可能な近似分布を構成し、そこから得られたサンプルを受容・棄却ステップによって正当化する独立メトロポリス・ヘイスティングス法 (MH) が知られている。ガンマ分布の形状パラメータの推測に特化した方法は Miller (2019) で提案されており、近似分布に正規分布ではなくガンマ分布を用いるのが特徴である。第二に、潜在変数を導入して、ガンマ関数の逆数を乱数発生可能な分布の混合で表現し、受容・棄却ステップ無しに乱数発生を行うデータ拡大法 (DA) が He, Polson and Xu (2021) で提案されている。この方法は Effective sample size (ESS) の意味で効率的ではあるが、Polya inverse gamma 分布からの乱数発生を必要とし、場合によっては計算に時間のかかる方法である。第三に、両者の長所を活かした DA-MH 法が Hamura, Irie and Sugasawa (2022) で考案されている。この方法はあくまで MH 法であり受容・棄却ステップを必要とするが、必要な潜在変数はベータ分布に従うため、DA 法よりも実行は容易である。

DA-MH 法は、Gauss’ multiplication formula に基づく以下の表現に依拠している。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)^n} &= C_n \frac{1}{\alpha^{n\alpha}} \alpha^{n-1/2} e^{n\alpha} \\ &\quad \times \prod_{j=2}^{n} \int_0^1 \rho_j^{\alpha+\frac{j-1}{n}-1} (1-\rho_j)^{\frac{n-j+1}{n}-1} d\rho_j \\ &\quad \times \frac{(n\alpha)^{n\alpha-1/2}}{\Gamma(n\alpha) e^{n\alpha}}\end{aligned}$$

この表現により、密度関数に現れる n 個のガンマ関数を 1 個にまで減らすことができる。第一行の項は尤度とあわせてガンマ分布の密度に比例することが期待される。第二行の積分表現はベータ分布に従う潜在変数が導入できることを示唆している。第三行の項は剰余項であり、受容・棄却ステップにおける受容確率を構成するが、Stirling の不等式により多くの場合で 1 に近い値となることが示される。

DA 法および DA-MH 法はガンマ分布の形状パラメータの例に限らず、ガンマ関数を含む密度関数からの乱数発生を必要とする MCMC に広く適用可能である。特に DA-MH 法は t 分布、ウィシャート分布、ディリクレ分布の形状パラメータのサンプリングに用いることができる。t 分布を用いた数値実験の結果、計算時間および ESS の意味で、DA-MH 法はガンマ分布に特化した MH 法と比較しても遜色ない効率性を達成していることが分かった。また多項・ディリクレ分布を用いた数値実験では時間あたりの ESS の意味で DA 法よりも DA-MH 法が優れていることが分かった。

Miller, J. W. (2019), “Fast and Accurate Approximation of the Full Conditional for Gamma Shape Parameters” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 28, 476480.

He, J., Polson, N., and Xu, J. (2021), “Bayesian Inference for Gamma Models,” *arXiv preprint*, arXiv:2106.01906.

Hamura, Y., Irie, K. and Sugasawa, S. (2022+) “On data augmentation for models involving reciprocal gamma functions,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, in press.