正方分割表におけるモーメントに基づく 周辺同等性からの隔たりを測る尺度

足立 匠 [1]　　安藤 宗司 [2]　　田畑 耕治 [2]

[1] 東京理科大学大学院 理工学研究科 情報科学専攻
[2] 東京理科大学 理工学部 情報科学科

1　はじめに

順序カテゴリ $r \times r$ 正方分割表において，行変数と列変数をそれぞれ X と Y とし，(i, j) セル確率を $p_{ij} = \Pr(X = i, Y = j)$ とする $(i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, r)$．正方分割表解析では，観測度数が主対角セルに集中する傾向があるため，行変数と列変数の独立性は成り立たないことが多い．そのため，独立性に代わり，行変数と列変数の対称性に関して関心がある．行変数と列変数の対称性を表す代表的なモデルとして，周辺同等 (MH) モデル (Stuart [2]) がある．

MH モデルは次のように表される．

$$p_{i\cdot} = p_{\cdot i} \quad (i = 1, \ldots, r),$$

ただし，$p_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{r} p_{it}$，$p_{\cdot i} = \sum_{s=1}^{r} p_{si}$ である．MH モデルは様々な表現があることが知られている．行変数 X と列変数 Y の周辺累積確率を用いると，MH モデルは次のようにも表される．

$$F_i^X = F_i^Y \quad (i = 1, \ldots, r-1),$$

ただし，

$$F_i^X = \sum_{s=1}^{i} p_{s\cdot} = \Pr(X \leq i), \quad F_i^Y = \sum_{t=1}^{i} p_{\cdot t} = \Pr(Y \leq i).$$

周辺累積確率 F_i^X と F_i^Y の差を考えると，MH モデルは次のようにも表される．

$$G_{1(i)} = G_{2(i)} \quad (i = 1, \ldots, r-1), \tag{1}$$

ただし，

$$G_{1(i)} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=i+1}^{r} p_{st} = \Pr(X \leq i, Y \geq i+1), \quad G_{2(i)} = \sum_{s=i+1}^{r} \sum_{t=1}^{i} p_{st} = \Pr(X \geq i+1, Y \leq i).$$

与えられたデータに対して MH モデルの当てはまりが悪い場合，(i) MH モデルよりも制約の弱いモデルを適用すること，(ii) MH モデルの当てはまりが悪い原因を分析すること，(iii) MH モデルからの隔たりの程度を測ることに関心がある．MH モデルの表現として式 (1) に注目して，これら (i) から (iii) に関する先行研究を紹介する．

式 (1) に基づく周辺非同等モデルとして，Tahata and Tomizawa [4] は，m 次パラメータ周辺同等 (MH(m)) モデルを提案した．既知の m ($m = 1, \ldots, r-1$) に対して，MH(m) モデルは次のように定義される．

$$G_{1(i)} = \prod_{k=0}^{m-1} \psi_k^{i^k} G_{2(i)} \quad (i = 1, \ldots, r-1).$$

$\psi_0 = \psi_1 = \cdots = \psi_{m-1} = 1$ のとき，MH(m) は MH モデルに一致する．MH(1) モデルは拡張周辺同等 (EMH) モデル (Tomizawa [5])，MH(2) モデルは一般化周辺同等モデル (Tomizawa [6]) に一致する．

式 (1) に基づく MH モデルよりも制約の弱いモデルとして，Tahata and Tomizawa [4] は，k 次モーメント周辺一致 (k-MME) モデルを提案した．既知の正の整数 k に対して，k-MME モデルは次のように定義される．

$$E[X^k] = E[Y^k],$$

ただし，

$$E[X^k] = \sum_{s=1}^{r} s^k p_{s\cdot}, \quad E[Y^k] = \sum_{t=1}^{r} t^k p_{\cdot t}.$$

さらに，Tahata and Tomizawa [4] は，k-MME モデルの別表現を次のように与えた．

$$\sum_{i=1}^{r-1} \left[(i+1)^k - i^k\right] G_{1(i)} = \sum_{i=1}^{r-1} \left[(i+1)^k - i^k\right] G_{2(i)}.$$

MH モデルの当てはまりが悪い原因を分析するために，Tahata and Tomizawa [4] は，「MH モデルが成り立つことと，全ての $k = 1, \ldots, r-1$ に対して k-MME モデルが成り立つことは必要十分である」という分解定理を与えた．この分解定理から，どのモーメントが一致していないことにより MH モデルの当てはまりが悪くなったのかを特定することが可能になる．

Tomizawa, Miyamoto and Ashihara [7] は，$G_{1(i)} + G_{2(i)} > 0$ ($i = 1, \ldots, r-1$) を仮定し，式 (1) に基づく MH モデルからの隔たりの程度を測る尺度を次のように提案した．

$$\Psi = \frac{1}{\log 2} \sum_{i=1}^{r-1} \left[G_{1(i)}^* \log \frac{G_{1(i)}^*}{Q_i^*} + G_{2(i)}^* \log \frac{G_{2(i)}^*}{Q_i^*} \right],$$

ただし，

$$G_{1(i)}^* = \frac{G_{1(i)}}{\Delta}, \quad G_{2(i)}^* = \frac{G_{2(i)}}{\Delta}, \quad Q_i^* = \frac{G_{1(i)}^* + G_{2(i)}^*}{2}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{r-1} (G_{1(i)} + G_{2(i)}).$$

尺度 Ψ は次の性質がある．

- $0 \leq \Psi \leq 1$,
- $\Psi = 0 \Leftrightarrow G_{1(i)} = G_{2(i)}$ ($i = 1, \ldots, r-1$) $\Leftrightarrow$ MH モデル,
- $\Psi = 1 \Leftrightarrow$「$G_{1(i)} = 0$ かつ $G_{2(i)} > 0$」または「$G_{1(i)} > 0$ かつ $G_{2(i)} = 0$」($i = 1, \ldots, r-1$).

分解定理は，MH モデルの当てはまりが悪い原因を特定するには有用であるが，MH モデルからの隔たりの程度を測ることは難しい．一方，尺度 Ψ は MH モデルからの隔たりの程度を測ることには有用であるが，MH モデルの当てはまりが悪い原因を特定することは難しい．本講演では，MH モデ

ルの当てはまりが悪い原因を特定することが可能な MH モデルからの隔たりの程度を測る尺度を提案することを目的とする．提案尺度により，与えられたデータに対して MH モデルの当てはまりが悪い場合，そのデータの特徴をより詳細に分析することが可能になると期待される．

2 提案尺度

順序カテゴリ $r \times r$ 正方分割表において，$\sum_{i=1}^{r-1}(G_{1(i)} + G_{2(i)}) > 0$ を仮定し，MH モデルからの隔たりの程度を測る尺度を次のように提案する．

$$\Phi = \frac{1}{r-1}\sum_{k=1}^{r-1}\phi_k,$$

ここで，

$$\phi_k = \frac{1}{\log 2} I(\{G_k^U, G_k^L\}; \{1/2, 1/2\}),$$

ただし，

$$I(\{G_k^U, G_k^L\}; \{1/2, 1/2\}) = G_k^U \log\left(\frac{G_k^U}{1/2}\right) + G_k^L \log\left(\frac{G_k^L}{1/2}\right),$$

$$G_k^U = \frac{\sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{1(i)}}{\Delta_k}, \quad G_k^L = \frac{\sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{2(i)}}{\Delta_k},$$

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{1(i)} + \sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{2(i)}.$$

$I(\{G_k^U, G_k^L\}; \{1/2, 1/2\})$ は，$\{G_k^U, G_k^L\}$, $\{1/2, 1/2\}$ 間のカルバックライブラー情報量であることに注意する．部分尺度 ϕ_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ は，次のようにも表せる．

$$\phi_k = 1 - \frac{1}{\log 2} H(\{G_k^U, G_k^L\}),$$

ここで，

$$H(\{G_k^U, G_k^L\}) = -G_k^U \log G_k^U - G_k^L \log G_k^L.$$

$H(\{G_k^U, G_k^L\})$ はシャノンエントロピーであることに注意する．部分尺度 ϕ_1 は，Yamamoto and Tomizawa [8] の 1-MME モデルからの隔たりの程度を測る尺度に一致する．

部分尺度 ϕ_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ は，k-MME モデルからの隔たりの程度を測る尺度であり，次の性質がある．

- $0 \leq \phi_k \leq 1$,
- $\phi_k = 0 \Leftrightarrow G_k^U = G_k^L \Leftrightarrow$ k-MME モデル,
- $\phi_k = 1 \Leftrightarrow$「$G_k^U = 1$ かつ $G_k^L = 0$」または「$G_k^U = 0$ かつ $G_k^L = 1$」.

したがって，尺度 Φ は次の性質がある．

- $0 \leq \Phi \leq 1$,
- $\Phi = 0 \Leftrightarrow \phi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, r-1)$,
- $\Phi = 1 \Leftrightarrow \phi_k = 1$ $(k = 1, \ldots, r-1)$.

Tahata and Tomizawa [4] が与えた分解定理「MH モデルが成り立つことと，全ての $k=1,\ldots,r-1$ に対して k-MME モデルが成り立つことは必要十分である」から，MH モデルが成り立つことと $\Phi=0$ であることは必要十分であることがわかる．

以上から，尺度 Φ は，MH モデルからの隔たりの程度を測ることに有用であり，部分尺度 ϕ_k $(k=1,\ldots,r-1)$ を用いることで，MH モデルの当てはまりが悪くなった原因がどの k-MME モデルによるものなのかを特定することが可能になる．

3　近似信頼区間

$r\times r$ 正方分割表の (i,j) セル観測度数を n_{ij} とする $(i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,r)$．また，$\{n_{ij}\}$ は多項分布に従うと仮定し，全標本数を N $(=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}n_{ij})$ とする．(i,j) セル確率 p_{ij} の推定値を $\hat{p}_{ij}$ $(=n_{ij}/N)$ とする．尺度 Φ の推定値 $\hat{\Phi}$ は，$\{p_{ij}\}$ を $\{\hat{p}_{ij}\}$ で置き換えることにより得られるとする．$r^2\times 1$ ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{p}$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}&=(n_{11},\ldots,n_{1r},n_{21},\ldots,n_{2r},\ldots,n_{r1},\ldots,n_{rr})^{\top},\\
\boldsymbol{p}&=(p_{11},\ldots,p_{1r},p_{21},\ldots,p_{2r},\ldots,p_{r1},\ldots,p_{rr})^{\top}.
\end{aligned}
$$

中心極限定理より，$\hat{\boldsymbol{p}}$ $(=\frac{1}{N}\cdot\boldsymbol{n})$ は漸近的に平均ベクトル $\boldsymbol{p}$，分散共分散行列 $\frac{1}{N}(\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{\top})$ の正規分布に従う．ここで，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})$ は i 番目の対角成分に $\boldsymbol{p}$ の i 番目の成分をもつ対角行列である．ここで，テイラー展開を用いると次式を得る．

$$
\hat{\Phi}=\Phi+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{p}^{\top}}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p})+o_p(\|\hat{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}\|),
$$

ただし，

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{p}^{\top}}=\left.\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{\boldsymbol{p}}^{\top}}\right|_{\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}.
$$

デルタ法 (Bishop, Fienberg and Holland [1, Sec.14.6]) により，$\sqrt{N}(\hat{\Phi}-\Phi)$ は漸近的に平均 0，分散 $\sigma^2[\Phi]$ の正規分布に従う．ここに，

$$
\begin{aligned}
\sigma^2[\Phi]&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{p}^{\top}}\right)(\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{\top})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{p}^{\top}}\right)^{\top}\\
&=\frac{1}{(r-1)^2}\sum\sum_{l<m}(p_{lm}\alpha_{lm}^2+p_{ml}\beta_{ml}^2),
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\alpha_{lm}&=\sum_{k=1}^{r-1}\left\{\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{m^k-l^k}{\Delta_k}\left(\log\left(2G_k^U\right)-\phi_k\log 2\right)\right\},\\
\beta_{ml}&=\sum_{k=1}^{r-1}\left\{\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{m^k-l^k}{\Delta_k}\left(\log(2G_k^L)-\phi_k\log 2\right)\right\},
\end{aligned}
$$

である．したがって，提案尺度 Φ に対する近似 $100(1-p)\%$ 信頼区間は次のように与えられる．

$$
\hat{\Phi}\pm z_{p/2}\hat{\sigma}\left[\Phi\right]/\sqrt{N}.
$$

ここで，$z_{p/2}$ は標準正規分布の上側 $100p/2\%$ 点であり，$\hat{\sigma}\,[\Phi]\,/\sqrt{N}$ は $\hat{\Phi}$ の推定近似標準誤差，$\hat{\sigma}^2[\Phi]$ は $\sigma^2[\Phi]$ の $\{p_{ij}\}$ を推定値 $\{\hat{p}_{ij}\}$ に置き換えることによって得られる分散の推定値である．

同様に，デルタ法を用いると，$\sqrt{N}(\hat{\phi}_k - \phi_k)$ $(k = 1, \ldots, r-1)$ は漸近的に平均 0，分散 $\sigma^2[\phi_k]$ の正規分布に従う．ここに，

$$\begin{aligned}\sigma^2[\phi_k] &= \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \boldsymbol{p}^\top}\right)(\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top)\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \boldsymbol{p}^\top}\right)^\top \\ &= \sum_{l<m}\sum(p_{lm}\gamma_{lm}^2 + p_{ml}\delta_{ml}^2),\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\gamma_{lm} &= \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{m^k - l^k}{\Delta_k}\left(\log\left(2G_k^U\right) - \phi_k \log 2\right), \\ \delta_{ml} &= \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{m^k - l^k}{\Delta_k}\left(\log(2G_k^L) - \phi_k \log 2\right),\end{aligned}$$

である．したがって，部分尺度 ϕ_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ に対する近似 $100(1-p)\%$ 信頼区間は次のように与えられる．

$$\hat{\phi}_k \pm z_{p/2}\hat{\sigma}\,[\phi_k]\,/\sqrt{N}.$$

ここで，$\hat{\sigma}\,[\phi_k]\,/\sqrt{N}$ は $\hat{\phi}_k$ の推定近似標準誤差，$\hat{\sigma}^2[\phi_k]$ は $\sigma^2[\phi_k]$ の $\{p_{ij}\}$ を推定値 $\{\hat{p}_{ij}\}$ に置き換えることによって得られる分散の推定値である．

4 数値例

4.1 既存尺度 Ψ と提案尺度 Φ の比較

次のように記号を定義する．

$$\Delta_k^U = \sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{1(i)}, \quad \Delta_k^L = \sum_{i=1}^{r-1}\left[(i+1)^k - i^k\right] G_{2(i)} \quad (k = 1, \ldots, r-1).$$

表 1 は次の制約を満たす確率構造に対して，セル確率を 10000 倍することで生成した 5×5 分割表の人工データである．

$$\Delta_1^U = 2.2\Delta_1^L, \quad \Delta_2^U = 2.8\Delta_2^L, \quad \Delta_3^U = 3.4\Delta_3^L, \quad \Delta_4^U = 4.0\Delta_4^L.$$

表 2 は次の制約を満たす確率構造に対して，セル確率を 10000 倍することで生成した 5×5 分割表の人工データである．

$$\Delta_1^U = 4.0\Delta_1^L, \quad \Delta_2^U = 3.4\Delta_2^L, \quad \Delta_3^U = 2.8\Delta_3^L, \quad \Delta_4^U = 2.2\Delta_4^L.$$

表 1: 人工データ 1 ($N = 10,000$)

857	112	121	123	154
512	857	359	377	971
193	149	857	297	573
291	201	569	857	533
45	42	48	45	857

表 2: 人工データ 2 ($N = 10,000$)

857	238	977	32	3
46	857	3131	32	3
52	963	857	29	3
8	9	9	857	4
8	9	9	148	859

表 1 と表 2 に既存尺度 Ψ と提案尺度 Φ を適用した結果（推定値，推定近似標準誤差，近似 95% 信頼区間）を表 3 と表 4 に示す．

表 3: 表 1 に既存尺度 Ψ と提案尺度 Φ を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
Ψ	0.216	0.008	(0.200, 0.231)
Φ	0.194	0.009	(0.176, 0.212)

表 4: 表 2 に既存尺度 Ψ と提案尺度 Φ を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
Ψ	0.343	0.011	(0.321, 0.365)
Φ	0.193	0.011	(0.173, 0.214)

既存尺度 Ψ では，表 1 よりも表 2 の方が MH モデルからの隔たりの程度は大きいと解釈できる．一方，提案尺度 Φ では，近似 95% 信頼区間が重なっているため，表 1 と表 2 の MH モデルからの隔たりの程度は同程度であると解釈できる．この結果から，既存尺度 Ψ では，低次の k-MME モデルからの隔たりの程度の影響を受けやすいと解釈できる．一方，提案尺度 Φ では，MH モデルからの隔たりの程度を測る際に，全ての k-MME モデルからの隔たりの程度の影響を等価として扱っている．

4.2 部分尺度の有用性

数値例を用いて，部分尺度により MH モデルの当てはまりが悪くなった原因がどのように特定することが可能になるかを例示する．

既存尺度 Ψ は，次のようにも表せる．

$$\Psi = \sum_{i=1}^{r-1}(G^*_{1(i)} + G^*_{2(i)})\psi_i,$$

ただし，

$$\psi_i = \frac{1}{\log 2}\left[G^c_{1(i)}\log\frac{G^c_{1(i)}}{1/2} + G^c_{2(i)}\log\frac{G^c_{2(i)}}{1/2}\right] = 1 - \frac{1}{\log 2}\left[-G^c_{1(i)}\log G^c_{1(i)} - G^c_{2(i)}\log G^c_{2(i)}\right],$$

$$G^c_{1(i)} = \frac{G_{1(i)}}{G_{1(i)} + G_{2(i)}}, \quad G^c_{2(i)} = \frac{G_{2(i)}}{G_{1(i)} + G_{2(i)}}.$$

既存尺度 Ψ の部分尺度 ψ_i $(i = 1, \dots, r-1)$ は次の性質がある．

- $0 \le \psi_i \le 1$,
- $\psi_i = 0 \Leftrightarrow G_{1(i)} = G_{2(i)}$,
- $\psi_i = 1 \Leftrightarrow$「$G_{1(i)} = 0$ かつ $G_{2(i)} > 0$」または「$G_{1(i)} > 0$ かつ $G_{2(i)} = 0$」.

したがって，部分尺度 ψ_i $(i = 1, \dots, r-1)$ は，MH モデルの当てはまりが悪い場合，どの i 番目のペア ($G_{1(i)}$ と $G_{2(i)}$) による影響が大きいかを特定することに有用である．

デルタ法を用いると，$\sqrt{N}(\hat{\psi}_i - \psi_i)$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ は漸近的に平均 0，分散 $\sigma^2[\psi_i]$ の正規分布に従う．

$$\begin{aligned}\sigma^2[\psi_i] &= \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{p}^\top}\right)(\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top)\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{p}^\top}\right)^\top \\ &= \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2 \frac{G^c_{1(i)} G^c_{2(i)}}{G_{1(i)} + G_{2(i)}} \left(\log G^c_{1(i)} - \log G^c_{2(i)}\right)^2.\end{aligned}$$

したがって，部分尺度 ψ_i $(i = 1, \ldots, r-1)$ に対する近似 $100(1-p)\%$ 信頼区間は次のように与えられる．

$$\hat{\psi}_i \pm z_{p/2} \hat{\sigma}\left[\psi_i\right]/\sqrt{N}.$$

ここで，$\hat{\sigma}\left[\psi_i\right]/\sqrt{N}$ は $\hat{\psi}_i$ の推定近似標準誤差，$\hat{\sigma}^2[\psi_i]$ は $\sigma^2[\psi_i]$ の $\{p_{ij}\}$ を推定値 $\{\hat{p}_{ij}\}$ に置き換えることによって得られる分散の推定値である．

表 1 と表 2 に部分尺度 ψ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ を適用した結果（推定値，推定近似標準誤差，近似 95% 信頼区間）を表 5 と表 6 に示す．

表 5: 表 1 に部分尺度 ψ_i を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
ψ_1	0.086	0.005	(0.077, 0.096)
ψ_2	0.113	0.005	(0.103, 0.124)
ψ_3	0.091	0.005	(0.082, 0.101)
ψ_4	0.617	0.010	(0.598, 0.636)

表 6: 表 2 に部分尺度 ψ_i を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
ψ_1	0.585	0.010	(0.567, 0.604)
ψ_2	0.277	0.008	(0.261, 0.292)
ψ_3	0.077	0.005	(0.068, 0.086)
ψ_4	0.636	0.010	(0.617, 0.655)

表 5 と表 6 の結果から，MH モデルの当てはまりが悪い原因は，表 1 では 4 番目のペア ($G_{1(4)}$ と $G_{2(4)}$) の非同等性による影響が大きいと解釈できる．表 2 では 1 番目 ($G_{1(1)}$ と $G_{2(1)}$) のペアと 4 番目のペア ($G_{1(4)}$ と $G_{2(4)}$) の非同等性による影響が大きいと解釈できる．しかしながら，i 番目のペア ($G_{1(i)}$ と $G_{2(i)}$) は i 番目のカテゴリの周辺確率の同等性 ($p_{i\cdot} = p_{\cdot i}$ $(i = 1, \ldots, r)$) と直接的に対応するわけではないので，結果の解釈が容易ではない．その具体例として，例えば，表 7 のような確率構造を考える．表 7 では，$p_{1\cdot} = p_{\cdot 1}, p_{2\cdot} \neq p_{\cdot 2}, p_{3\cdot} = p_{\cdot 3}, p_{4\cdot} \neq p_{\cdot 4}$ であるが，$\psi_1 = 0, \psi_2 \neq 0, \psi_3 = 0$ となるわけではないので，注意が必要である．実際，$\psi_1 = 0, \psi_2 = 0.129, \psi_3 = 0.155$ となる．

表 7: 確率構造例

	1	2	3	4	計
1	0.06	0.04	0.04	0.06	0.20
2	0.04	0.02	0.02	0.02	0.10
3	0.04	0.16	0.06	0.04	0.30
4	0.06	0.08	0.18	0.08	0.40
計	0.20	0.30	0.30	0.20	1.00

次に，表 1 と表 2 に提案部分尺度 ϕ_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ を適用した結果（推定値，推定近似標準誤差，近似 95% 信頼区間）を表 8 と表 9 に示す．表 8 と表 9 の結果から，MH モデルの当てはまり

が悪い原因は，表 1 では k が 4, 3, 2, 1 の順に k-MME モデルからの隔たりによる影響が大きいと解釈できる．表 2 では k が 1, 2, 3, 4 の順に k-MME モデルからの隔たりによる影響が大きいと解釈できる．これらは，表 1 と表 2 のデータの特徴に一致している．

表 8: 表 1 に提案部分尺度 ϕ_k を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
ϕ_1	0.104	0.007	(0.089, 0.119)
ϕ_2	0.168	0.009	(0.151, 0.186)
ϕ_3	0.227	0.010	(0.207, 0.247)
ϕ_4	0.278	0.011	(0.256, 0.300)

表 9: 表 2 に提案部分尺度 ϕ_k を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
ϕ_1	0.277	0.011	(0.256, 0.299)
ϕ_2	0.226	0.011	(0.205, 0.247)
ϕ_3	0.167	0.011	(0.146, 0.189)
ϕ_4	0.102	0.011	(0.081, 0.124)

4.3 実データ解析

表 10 は，消化性潰瘍の既往を有する日本人成人患者をエソメプラゾールまたはプラセボにランダムに割り付け，1 日 1 回 (計 24 週間) 投与した後の修正済み LANZA スコアと治療開始時点の修正済み LANZA スコアの変化について，ランダム化比較試験の結果を示した 5×5 分割表である (Sugano et al. [3])．修正済み LANZA スコアは，「0」が最も良いスコア，「+4」が最も悪いスコアを表す．表 10 のデータに対して，MH モデルが成り立つ場合，最終評価時点の修正済み LANZA スコアと治療開始時点の修正済み LANZA スコアの変化はないと解釈できる．

表 10: 治療前後の修正済み LANZA スコアの変化 (Sugano et al. [3])

	治療開始時点					
最終評価時点	0	+1	+2	+3	+4	合計
(a) エソメプラゾール群						
0	78	9	26	3	1	117
+1	1	5	6	4	0	16
+2	9	1	10	3	1	24
+3	1	0	1	0	0	2
+4	3	0	1	1	2	7
合計	92	15	44	11	4	166
(b) プラセボ群						
0	41	2	19	0	0	62
+1	8	0	4	0	0	12
+2	12	4	14	3	0	33
+3	0	1	1	3	0	5
+4	29	7	11	6	0	53
合計	90	14	49	12	0	165

表 10(a) と表 10(b) に既存尺度 Ψ と提案尺度 Φ，提案部分尺度 ϕ_k を適用した結果（推定値，推定

近似標準誤差，近似 95% 信頼区間）を表 11 と表 12 に示す．

表 11: 表 10(a) に Ψ と Φ，ϕ_k を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
Ψ	0.157	0.076	(0.008, 0.305)
Φ	0.076	0.066	(−0.054, 0.207)
ϕ_1	0.124	0.077	(−0.027, 0.276)
ϕ_2	0.093	0.073	(−0.050, 0.237)
ϕ_3	0.059	0.067	(−0.072, 0.190)
ϕ_4	0.029	0.054	(−0.077, 0.135)

表 12: 表 10(b) に Ψ と Φ，ϕ_k を適用した結果

尺度	推定尺度	標準誤差	信頼区間
Ψ	0.420	0.058	(0.307, 0.534)
Φ	0.476	0.067	(0.345, 0.607)
ϕ_1	0.304	0.075	(0.158, 0.451)
ϕ_2	0.418	0.073	(0.276, 0.561)
ϕ_3	0.537	0.066	(0.407, 0.667)
ϕ_4	0.644	0.058	(0.530, 0.758)

表 11 の結果から，提案尺度 Φ の近似 95% 信頼区間は 0 を含んでいるため，MH モデルが成り立っていると解釈できる．一方，既存尺度 Ψ の近似 95% 信頼区間は 0 を含んでいないため，MH モデルが成り立っていないと解釈できる．実際，表 10(a) のデータに MH モデルを適用した際の尤度比カイ二乗統計量の値は 19.599 であり，有意水準 5% で有意である．したがって，適合度検定の結果から，MH モデルは成り立たないと判断される．表 10(a) のデータはサンプルサイズが 166 と少ないことから，有限標本における提案尺度の推定量，近似信頼区間の精度を数値実験により精査する必要がある．

表 12 の結果から，提案尺度 Φ と既存尺度 Ψ の近似 95% 信頼区間がともに 0 を含んでいないため，MH モデルが成り立っていないと解釈できる．また，MH モデルの当てはまりが悪い原因は，提案部分尺度 ϕ_k の点推定値より，k が 4, 3, 2, 1 の順に k-MME モデルからの隔たりによる影響が大きいと解釈できる．

以上の結果と表 10 のデータから，エソメプラゾール群では修正済み LANZA スコアは軽度の改善傾向を示し，プラセボ群では悪化傾向を示していると解釈できる．消化性潰瘍は進行性の疾患であるため，この結果は妥当であり，エソメプラゾールの有効性はあると解釈するのが自然である．より詳細な検討をする際には，表 10(a) と表 10(b) に適用した提案尺度 Φ の差の推定値と信頼区間などを用いる必要がある．

5　まとめ

正方分割表解析において，与えられたデータに対して MH モデルの当てはまりが悪い場合，(i) MH モデルよりも制約の弱いモデルを適用すること，(ii) MH モデルの当てはまりが悪い原因を分析すること，(iii) MH モデルからの隔たりの程度を測ることに関心がある．本講演では，(ii) と (iii) を対象として，MH モデルの当てはまりが悪い原因を特定することが可能な MH モデルからの隔たりの程度を測る尺度を提案した．

数値例を用いて，提案尺度と既存尺度の特徴を比較し，提案尺度の有用性を示した．実データ解析において，臨床試験データに適用し，提案尺度の有用性を示した．提案尺度は部分尺度 ϕ_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ を用いることで，MH モデルの当てはまりが悪くなった原因がどの k-MME モデルによるものなのかを特定することが可能であるため，潜在分布として連続型の分布を仮定できる正方分割表データに適用することにも有用であると考えられる．

今後の課題として，実データ解析でも述べたように，有限標本における提案尺度の推定量，近似信頼区間の精度を数値実験により精査する必要がある．2 つの分割表データに対して MH モデルからの隔たりの程度を比較する際には，提案尺度 Φ の差の信頼区間などを用いる必要がある．そのため，提案尺度 Φ の差の近似信頼区間の精度も数値実験により精査する必要がある．さらに，潜在分布として連続型の分布を仮定し，乱数により生成した正方分割表データに対して提案尺度を適用することにより，有用性をさらに検証する必要がある．

参考文献

[1] Y. M. Bishop, S. E. Fienberg, and P. W. Holland. *Discrete multivariate analysis: theory and practice*. Springer Science & Business Media, New York, 2007.

[2] A. Stuart. A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika*, 42(3/4):412–416, 1955.

[3] K. Sugano, Y. Kinoshita, H. Miwa, T. Takeuchi, and E. N. P. S. Group. Randomised clinical trial: esomeprazole for the prevention of nonsteroidal anti-inflammatory drug-related peptic ulcers in j apanese patients. *Alimentary pharmacology & therapeutics*, 36(2):115–125, 2012.

[4] K. Tahata and S. Tomizawa. Generalized marginal homogeneity model and its relation to marginal equimoments for square contingency tables with ordered categories. *Advances in Data Analysis and Classification*, 2(3):295–311, 2008.

[5] S. Tomizawa. Diagonals-parameter symmetry model for cumulative probabilities in square contingency tables with ordered categories. *Biometrics*, 49(3):883–887, 1993.

[6] S. Tomizawa. A generalization of the marginal homogeneity model for square contingency tables with ordered categories. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 20(4):349–360, 1995.

[7] S. Tomizawa, N. Miyamoto, and N. Ashihara. Measure of departure from marginal homogeneity for square contingency tables having ordered categories. *Behaviormetrika*, 30(2):173–193, 2003.

[8] K. Yamamoto and S. Tomizawa. Decomposition of measure for marginal homogeneity in square contingency tables with ordered categories. *Austrian Journal of Statistics*, 36(2):105–114, 2007.

著者連絡先: 足立 匠

E-mail: 6321503@ed.tus.ac.jp