

# 円周上の歪対称分布とその推定について

法政大学 阿部 俊弘  
静岡県立大学 井本 智明

## 概要

wrapped Cauchy 分布のように密度関数がある関数の逆数で定義されるような分布に関する EM アルゴリズムの単純な表現について考える. また, sine-skewed circular distributions とは別の摂動型の歪対称円周分布族を考え, それに対する単純な EM アルゴリズムに取り組んでいく. さらに, それらの有限混合モデルについても EM アルゴリズムを与える. 最後に実際のデータを用いて提案された EM アルゴリズムによるパラメータ推定の例を与える.

## 1 Introduction

摂動型の歪対称な円周分布として確率密度関数が

$$f(\theta) = (1 + \lambda \sin \theta) f_0(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (1)$$

で与えられる sine-skewed circular distributions が知られている (Abe & Pewsey (2011)). ここで,  $f_0(\theta)$  は  $\theta = 0$  の周りで対称な円周分布の確率密度関数であり, パラメータ  $\lambda (\in [-1, 1])$  は歪みを表すパラメータである.

分布 (1) は, 任意の対称な円周分布の歪対称化を可能としていること, 三角モーメントが元の対称分布  $f_0$  の三角モーメントを用いて与えることができること, von Mises 分布, cardioid 分布, wrapped Cauchy 分布やそれらを特別な場合として含む Jones–Pewsey 分布に対しても単峰性が議論できること等, 様々な良い性質がある. この分布の拡張として, Miyata, Shiohama & Abe (submitted) は摂動項をベータ関数で置き換えた extended sine-skewed circular distributions を提案している. これらの摂動型の歪対称円周分布がある一方, データが half distribution となる場合は  $|\lambda| = 1$  のときでも当てはまりが悪くなる, という問題がある. これに対応するため, まず, Azzalini & Capitanio (1999, 2003) の円周版である, 次の確率変数変換を考える.

**Theorem 1.** 確率変数  $\Phi$  が対称分布の確率密度関数  $f_0$  を持ち, 確率変数  $U$  が一様分布  $U(0, 1)$  に従うとする. また,  $G$  を対称分布の分布関数とし, 関数  $t$  は奇関数であるとする. このとき,

$$\Theta = \text{sgn}(G(t(\Phi)) - U)\Phi = \begin{cases} \Phi & \text{if } U \leq G(t(\Phi)) \\ -\Phi & \text{if } U > G(t(\Phi)) \end{cases}$$

とすると,  $f(\theta) = 2G(t(\theta))f_0(\theta)$  となる.

*Proof.*

$$\begin{aligned}
P(\Theta \leq \theta) &= P(\Theta \leq \theta, U \leq G(t(\Phi))) + P(\Theta \leq \theta, U > G(t(\Phi))) \\
&= P(\Phi \leq \theta, U \leq G(t(\Phi))) + P(\Phi > -\theta, U > G(t(\Phi))) \\
&= \int_{-\pi}^{\theta} P(U \leq G(t(\phi))) f_0(\phi) d\phi + \int_{-\theta}^{\pi} P(U > G(t(\phi))) f_0(\phi) d\phi \\
&= \int_{-\pi}^{\theta} G(t(\phi)) f_0(\phi) d\phi + \int_{-\theta}^{\pi} (1 - G(t(\phi))) f_0(\phi) d\phi
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{d}{d\theta} P(\Theta \leq \theta) \\
&= G(t(\theta)) f_0(\theta) + (1 - G(t(-\theta))) f_0(-\theta) \\
&= 2G(t(\theta)) f_0(\theta)
\end{aligned}$$

□

この定理において奇関数  $t$  と分布関数  $G$  には様々な選び方がある. sine-skewed circular distributions は  $G$  を一様分布  $U(0, 1)$  とし,  $t(\cdot) = \lambda \sin(\cdot)$  ( $|\lambda| \leq 1$ ) とする, または,  $G$  を円周一様分布  $U(-\pi, \pi)$  とし,  $t(\cdot) = \pi \lambda \sin(\cdot)$  ( $|\lambda| \leq 1$ ) とすれば得られる. sine-skewed circular distributions では  $|\lambda| \leq 1$  の制約があるので, この制約をより広くするために, 関数  $G$  を Cauchy 分布の分布関数とした

$$f(\theta) = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta) \right) f_0(\theta) \quad (2)$$

を考える. ここで,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$  である. この分布は Cauchy 分布を用いて歪対称化しているため, Cauchy sine-skewed circular distributions (CaSSCD) と呼ぶことにする. 特に, base density が円周一様分布のとき,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} \arctan(\lambda \sin \theta)$$

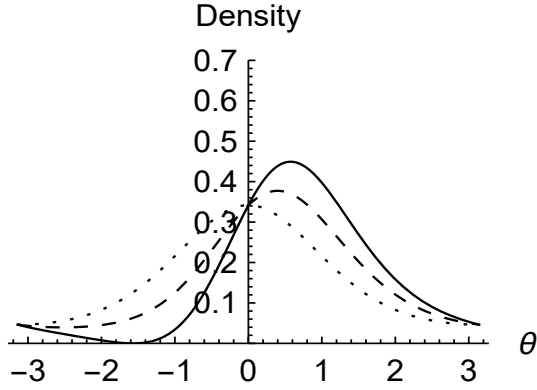
となり, cardioid 分布とは別の円周一様分布の摂動分布が現れ,  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  のとき, half distribution に帰着する. sine-skewed circular distributions では skew parameter  $\lambda$  の範囲が  $-1 \leq \lambda \leq 1$  であり, データによっては  $\lambda$  がパラメータ空間の端点で推定されることがあるが, pdf (2) を持つ分布ではそのような問題は生じない.

sine-skewed von Mises 分布, sine-skewed wrapped Cauchy 分布と pdf (2) において base density  $f_0(\theta)$  を von Mises 分布の pdf

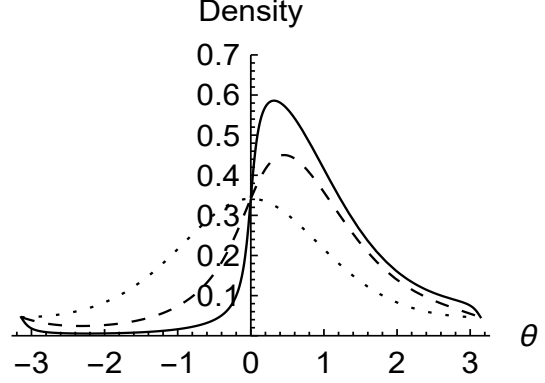
$$f_{VM}(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos \theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi), \quad (3)$$

または wrapped Cauchy 分布の pdf

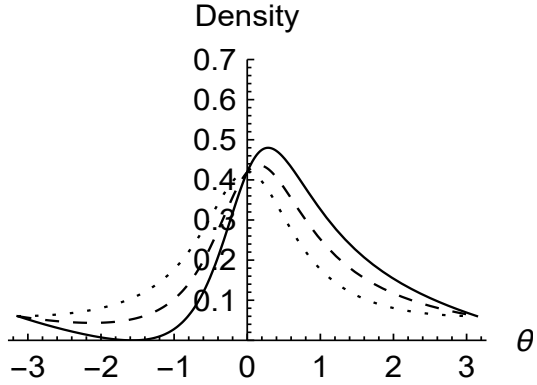
$$f_{WC}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho_0^2}{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos \theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi) \quad (4)$$



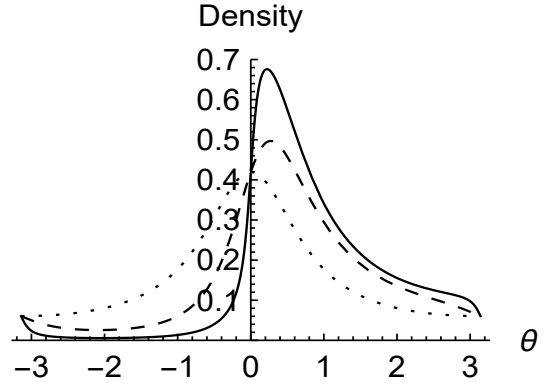
(a) Sine-skewed von Mises densities (SSVM) with  $\kappa = 1$  for  $\lambda = 0$  (dotted),  $\lambda = 0.5$  (dashed) and  $\lambda = 1$  (solid).



(b) Cauchy sine-skewed von Mises densities (CaSSVM) with  $\kappa = 1$  for  $\lambda = 0$  (dotted),  $\lambda = 5$  (dashed) and  $\lambda = 10$  (solid).



(c) Sine-skewed wrapped Cauchy densities (SSWC) with  $\rho_0 = 0.45$  for  $\lambda = 0$  (dotted),  $\lambda = 0.5$  (dashed) and  $\lambda = 1$  (solid).



(d) Cauchy sine-skewed wrapped Cauchy densities (CaSSWC) with  $\rho_0 = 0.45$  for  $\lambda = 0$  (dotted),  $\lambda = 5$  (dashed) and  $\lambda = 10$  (solid).

Figure 1: Density functions for the sine-skewed von Mises (SSVM), Cauchy sine-skewed von Mises (CaSSVM), sine-skewed wrapped Cauchy (SSWC) and Cauchy sine-skewed wrapped Cauchy (CaSSWC) densities.

としたときの比較を図1に示す. ここで,  $\kappa \in (0, \infty)$ ,  $\rho_0 \in (0, 1)$  である. 位置パラメータ  $\mu \in [-\pi, \pi)$  は  $\theta \mapsto \theta - \mu$  として導入できる.

pdf (2) に対して, circular skewness と circular kurtosis (see, e.g., Jammalamadaka & SenGupta, 2001; Mardia & Jupp, 1999) を考える: sine-skewed circular distributions と同様, (2) の Cauchy sine-skewed circular distributions の cosine モーメントも base density  $f_0(\theta)$  の cosine モーメントと等しくなる. すなわち,  $p = \pm 1, \pm 2, \dots$  に対して,  $\alpha_{\lambda,p} = E_f[\cos p\Theta] = \alpha_{0,p}$  である. ここで,  $\alpha_{0,p}$  は対称な base density  $f_0$  の  $p$  次の cosine モーメントである. Cauchy sine-skewed circular distributions の sine モーメント

$$\beta_{\lambda,p} = E_f[\sin p\Theta] = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin p\theta \arctan(\lambda \sin \theta) f_0(\theta) d\theta$$

は数値的に求めることになる.

$p$  次の平均合成ベクトル長と  $p$  次の平均方向は, それぞれ,

$$\rho_p = \sqrt{\alpha_{0,p}^2 + \beta_{\lambda,p}^2}, \quad \mu_p = \arg\{\alpha_{0,p} + i\beta_{\lambda,p}\}.$$

特に,  $\rho \equiv \rho_1 = \sqrt{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2} \sqrt{(\rho - \sqrt{\rho^2 - 1})^2 + \beta_{\lambda,1}^2}$  であり,  $\mu \equiv \mu_1 = \arg\{\alpha_{0,1} + i\beta_{\lambda,1}\}$  となる. circular variance と circular standard deviation は

$$V = 1 - \rho = 1 - \sqrt{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2},$$

$$\sigma = \{-2 \log(1 - V)\}^{1/2} = [-\log\{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2\}]^{1/2}.$$

により与えられる. 平均方向  $\mu$  周りの 2 次の cosine モーメントと sine モーメントである  $\bar{\alpha}_2 = E\{\cos 2(\Theta - \mu)\}$  と  $\bar{\beta}_2 = E\{\sin 2(\Theta - \mu)\}$ , は

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 &= E\{\cos 2(\Theta - \mu)\} = E(\cos 2\Theta) \cos 2\mu + E(\sin 2\Theta) \sin 2\mu \\ &= E(\cos 2\Theta)(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu) + 2E(\sin 2\Theta) \cos \mu \sin \mu \\ &= \alpha_{0,2} \frac{\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2}{\rho_1^2} + 2\beta_{\lambda,2} \frac{\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}}{\rho_1^2} \\ &= \frac{\alpha_{0,2}(\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2) + 2\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}\beta_{\lambda,2}}{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_2 &= E\{\sin 2(\Theta - \mu)\} = E(\sin 2\Theta)(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu) - 2E(\cos 2\Theta) \cos \mu \sin \mu \\ &= \frac{\beta_{\lambda,2}(\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2) - 2\alpha_{0,2}\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}}{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2} \end{aligned}$$

であり, circular skewness と kurtosis は  $\gamma_1 = \bar{\beta}_2/V^{3/2}$  と  $\gamma_2 = (\bar{\alpha}_2 - \rho^4)/V^2$  であり,

$$\gamma_1 = \frac{\beta_{\lambda,2}(\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2) - 2\alpha_{0,2}\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}}{(1 - \sqrt{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2})^{3/2}(\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2)}$$

と

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{\alpha_{0,2}(\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2) + 2\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}\beta_{\lambda,2} - (\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2)^2}{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2} - (\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2)^2 \\ &= \frac{\alpha_{0,2}(\alpha_{0,1}^2 - \beta_{\lambda,1}^2) + 2\alpha_{0,1}\beta_{\lambda,1}\beta_{\lambda,2} - (\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2)^3}{(1 - \sqrt{\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2})^2(\alpha_{0,1}^2 + \beta_{\lambda,1}^2)}\end{aligned}$$

により与えられる. 図2では  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  の等高線図を与えている.

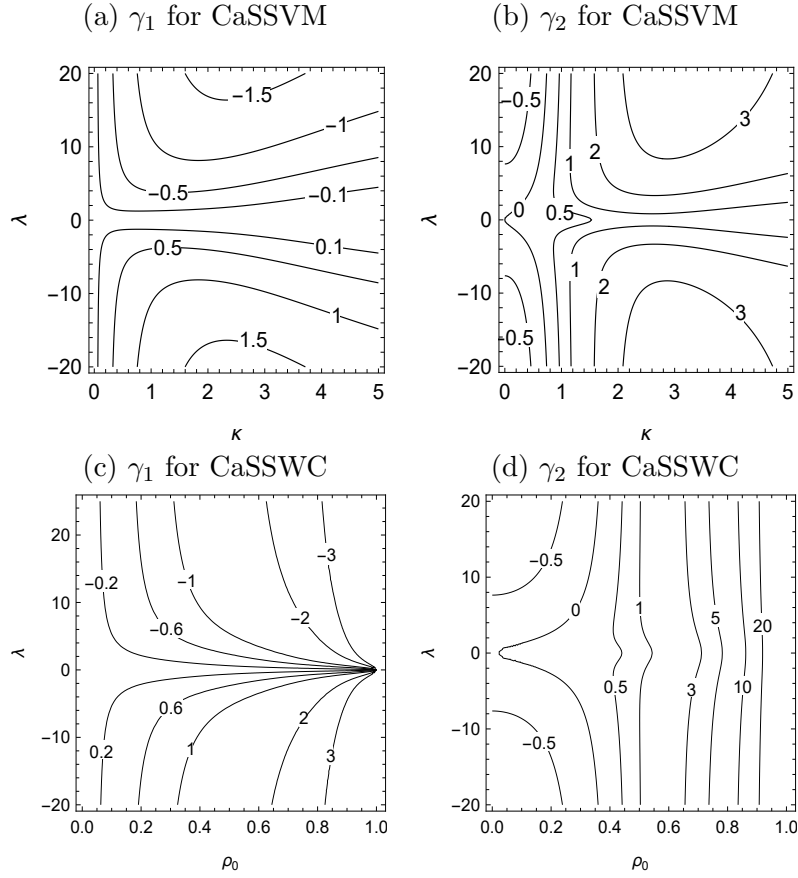


図2: Contour plots of the skewness and kurtosis measures for the Cauchy sine-skewed von Mises (CaSSVM) and Cauchy sine-skewed wrapped Cauchy (CaSSWC) distributions.

円周分布のパラメータ推定において, 通常 von Mises 分布のように最尤推定解が単純な形で与えられる場合は稀で, その他の円周分布については通常, 数値計算アルゴリズムに頼らざるを得ない. Cauchy 分布の circular 版である wrapped Cauchy 分布の最尤推定のためのアルゴリズムは Kent & Tyler (1988) で与えている一方, その他の角度分布の推定アルゴリズムについてはあまり研究がされていない. 本論文では, Abe (submitted) のアイデアを援用し, wrapped Cauchy 分布のように, 密度関数が逆数で表現できるような分布に対する EM アルゴリズムの単純な表現を考えていく. また, その歪対称化として pdf (2) において base density  $f_0(\theta)$  を von Mises 分布 (3), または,

wrapped Cauchy 分布 (4) としたときの Cauchy sine-skewed circular distributions について単純な EM アルゴリズムに取り組んでいく. Cauchy sine-skewed von Mises(CaSSVM) 分布の pdf は

$$f(\theta) = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta) \right) \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos \theta}, \quad (5)$$

であり, Cauchy sine-skewed wrapped Cauchy(CaSSWC) 分布の pdf は

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta) \right) \frac{1}{\rho_1 - \cos \theta} \quad (6)$$

である. ただし,  $\kappa \in (0, \infty)$ ,  $\rho_1 = (1 + \rho_0^2)/(2\rho_0) \in (1, \infty)$ ,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$  である. 注意点として,  $\lambda = 0$  とすると, それぞれ base density に帰着するが, (6) では EM アルゴリズムの表現を単純化にするために リパラメトライズがされている.

## 2 A simple EM algorithm for the Cauchy type distributions on the circle

### 2.1 A reparametrization of the wrapped Cauchy distribution and its simple EM algorithm

まず, 次のように確率密度関数を表現しておく.  $f_{WC}(\theta)$  は wrapped Cauchy 分布の pdf とし,  $k_0(\theta)$  をその密度部分

$$f_{WC}(\theta) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} k_0(\theta) d\theta \right)^{-1} k_0(\theta)$$

とする. このとき,  $k_0(\theta) = (\rho_1 - \cos(\theta - \mu))^{-1}$  となり, pdf (4) の  $f_{WC}(\theta)$  は

$$f_{WC}(\theta) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} k_0(\theta) d\theta \right)^{-1} k_0(\theta) = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{2\pi} \frac{1}{\rho_1 - \cos(\theta - \mu)}$$

と表現できる. ここで,  $\mu \in [-\pi, \pi)$ ,  $\rho_1 = (1 + \rho_0^2)/(2\rho_0) \in (1, \infty)$  である. Abe (submitted) と同様にして, 完全密度を

$$f(\theta, y_0) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} k_0(\theta) d\theta \right)^{-1} \exp\left(-\frac{y_0}{k_0(\theta)}\right) = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{2\pi} \exp\{-y_0(\rho_1 - \cos(\theta - \mu))\} \quad (7)$$

とする. 完全密度 (7) は Abe & Ley (2017) は確率密度関数において,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\lambda = 0$  としたものと同値である. 完全密度 (7) に対して, 完全対数尤度関数は

$$\ell_c(\boldsymbol{\xi}) = -n \log(2\pi) + \frac{n}{2} \log(\rho_1^2 - 1) - \sum_{i=1}^n y_{0i} \{\rho_1 - \cos(\theta_i - \mu)\}$$

により与えられる. ここで,  $\boldsymbol{\xi} = (\mu, \rho)^{\top}$  である. これより, いわゆる  $Q$  関数  $Q(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = \mathbb{E}[\ell_c(\boldsymbol{\xi}) | \Theta = \boldsymbol{\theta}]$  は

$$Q(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = -n \log(2\pi) + \frac{n}{2} \log(\rho_1^2 - 1) - \sum_{i=1}^n \frac{\rho_1 - \cos(\theta_i - \mu)}{\rho_1^{(k)} - \cos(\theta_i - \mu^{(k)})}$$

となる.  $Q$  関数を  $\mu$  と  $\rho_1$  に関してそれぞれ微分すると, 更新式の解は

$$\begin{aligned}\mu^{(k+1)} &= \arg \left( \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_i}{\rho_1^{(k)} - \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} + i \sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i}{\rho_1^{(k)} - \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} \right), \\ \rho_1^{(k+1)} &= \frac{\sqrt{1 + 4R(\mu^{(k)}, \rho_1^{(k)})^2 + 1}}{2R(\mu^{(k)}, \rho_1^{(k)})} \quad (> 1)\end{aligned}$$

で与えられる. ここで,  $R_1(\mu^{(k)}, \rho_1^{(k)})$  は

$$R_1(\mu^{(k)}, \rho_1^{(k)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_1^{(k)} - \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} \quad (> 0)$$

である. また,

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_1^* - \sqrt{\hat{\rho}_1^{*2} - 1} \quad \left( \hat{\rho}_1^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_1^{(k)} \right)$$

とすれば, (4) における  $\rho_0$  の MLE が得られる.

**Remark.** この推定アルゴリズムにおいて関数  $k$  の値を  $k(\theta) = (1 - \rho_2 \cos(\theta - \mu))^{-1}$  ( $\rho_2 \in [0, 1)$ ) とリパラメトライズしても同様に wrapped Cauchy 分布に対する EM アルゴリズムの陽的な解を与えることができる:

$$R_2(\mu^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \mu^{(k+1)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\cos(\theta_i - \mu^{(k+1)})}{1 - \rho_2^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})}$$

とすると,  $\mu^{(k+1)}$  と  $\rho_2^{(k+1)}$  は

$$\mu^{(k+1)} = \arg \left( \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_i}{1 - \rho_2^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} + i \sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i}{1 - \rho_2^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} \right)$$

と

$$\rho_2^{(k+1)} = \frac{\sqrt{1 + 4R_2(\mu^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \mu^{(k+1)})^2 - 1}}{2R_2(\mu^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \mu^{(k+1)})}$$

で与えられる.  $\rho_2^{(k+1)}$  の推定において  $\mu^{(k+1)}$  があるが, wrapped Cauchy 分布の EM アルゴリズムによる推定に関しては困難は生じない. しかし, 後の歪対称化でこれらのリパラメトライズした wrapped Cauchy 分布を用いると, EM アルゴリズムの表現を行う際に困難が生じる.

## 2.2 EM algorithm for the circular $t$ distribution

$k_0(\theta; \xi) = (1 - \rho \cos(\theta - \mu))^{-1}$  とし,  $k_0(\theta; \xi, \nu) = k_0(\theta; \xi)^\nu = (1 - \rho \cos(\theta - \mu))^{-\nu}$  とする. ここで,  $(\mu, \rho, \nu)^\top \in [-\pi, \pi) \times [0, 1) \times (0, \infty)$  である. このとき,  $\Theta$  の marginal は,

$$f_\Theta(\theta) = \left( \int_{S_\Theta} k_0(\theta) d\theta \right)^{-1} k_0(\theta) = \frac{(1 - \rho)^\nu}{2\pi {}_2F_1\left(\nu, \frac{1}{2}; 1; -\frac{2\rho}{1-\rho}\right)} (1 - \rho \cos(\theta - \mu))^{-\nu}$$

により与えられる。ここで、 ${}_2F_1$  は Gauss hypergeometric function であり、

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(1-zt)^\alpha} dt, \quad \gamma > \beta > 0$$

により定義される (Gradshteyn & Ryzhik (2015), Eq. (9.111), p. 1014). 完全密度を

$$\begin{aligned} f(\theta, y_0) &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} k_0(\theta; \boldsymbol{\xi}, \nu) d\theta \right)^{-1} \exp \left( -\frac{y_0^{1/\nu}}{k_0(\theta; \boldsymbol{\xi})} \right) \\ &= \frac{(1-\rho)^\nu}{2\pi\Gamma(1+\nu) {}_2F_1\left(\nu, \frac{1}{2}; 1; -\frac{2\rho}{1-\rho}\right)} \exp \left\{ -y_0^{1/\nu} (1 - \rho \cos(\theta - \mu)) \right\} \end{aligned}$$

とすると、 $Q$  関数は

$$Q(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = -n \log \Gamma(1+\nu) - n \log \left( {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \nu; 1; \frac{2\rho}{1+\rho}\right) \right) - \nu \sum_{i=1}^n \frac{1 - \rho \cos(\theta_i - \mu)}{1 - \rho^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})}.$$

一般に、 $\nu$  が既知のときでさえ、 $\rho$  に関しては数値的に計算するしかないが、 $\mu$  に関しては単純な更新式を得ることができる: この  $Q$  関数を  $\mu$  に関して微分して、

$$\mu^{(k+1)} = \arg \left( \sum_{i=1}^n \frac{\rho^{(k)} \cos \theta_i}{1 - \rho^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} + i \sum_{i=1}^n \frac{\rho^{(k)} \sin \theta_i}{1 - \rho^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})} \right)$$

が得られる。

$\nu = 1$  の場合は wrapped Cauchy 分布であり、この場合は  $\mu$  と  $\rho$  について単純な更新式が得られたが、 $\nu = 2$  の場合も  $\mu$  と  $\rho$  について単純な更新式が得られる:  $\nu = 2$  のとき、 $Q$  関数は

$$Q(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^{(k)}) = -n \log(2\pi) + \frac{3}{2}n \log(1 - \rho^2) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - \rho \cos(\theta_i - \mu)}{1 - \rho^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})}$$

となる。  $\rho$  に関して微分することにより、

$$\rho^{(k+1)} = \frac{\sqrt{1 + 4C_2(\rho^{(k)})^2} - 1}{2C_2(\rho^{(k)})}$$

となる。ここで  $C_2(\rho^{(k)})$  は

$$C_2(\rho^{(k)}) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n \frac{\cos(\theta_i - \mu^{(k+1)})}{1 - \rho^{(k)} \cos(\theta_i - \mu^{(k)})}$$

である。

$\nu \geq 3$  のとき、更新式は単純な形式とはならず、数値的に求めることになる。また、scale  $\nu$  が未知のとき、陽的な表現はできないので、一般的な数値的手法に頼らざるを得ない。



### 3 Properties of the Cauchy sine-skewed circular distributions

#### 3.1 Marginal and conditional distributions

Abe (submitted) と同様にして,

$$k_1(\theta, w) = \frac{1}{1 + (w - \lambda \sin \theta)^2}, \quad k_0(\theta; \rho) = \frac{1}{\rho_1 - \cos \theta}$$

とし, 完全密度

$$\begin{aligned} f(\theta, w, y_1, y_0) &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) k_0(\theta; \rho) dw d\theta \right)^{-1} \exp \left( -\frac{y_1}{k_1(\theta, w)} - \frac{y_0}{k_0(\theta; \rho)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{\pi^2} \exp \left\{ -y_1 \left( 1 + (w - \lambda \sin \theta)^2 \right) \right\} \exp \left\{ -y_0 (\rho_1 - \cos \theta) \right\} \\ &(\theta, w, y_1, y_0) \in [-\pi, \pi) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \end{aligned}$$

を考える. このとき,  $\Theta$  の周辺分布の pdf は (6) である. 同時分布の密度関数は

$$f(\theta, w) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) k_0(\theta; \rho) dw d\theta \right)^{-1} k_1(\theta, w) k_0(\theta; \rho) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 + (w - \lambda \sin \theta)^2} \frac{1}{\rho_1 - \cos \theta} \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{\rho_1 - \cos \theta}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} f(\theta, y_0) &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) k_0(\theta; \rho) dw d\theta \right)^{-1} \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) dw \exp \left( -\frac{y_0}{k_0(\theta; \rho)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta) \right) \exp \left\{ -y_0 (\rho_1 - \cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

である. これより,

$$\begin{aligned} f(w, y_1, y_0 | \theta) &= \left( \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) dw k_0(\theta; \rho) \right)^{-1} \exp \left( -\frac{y_1}{k_1(\theta, w)} - \frac{y_0}{k_0(\theta; \rho)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\rho_1 - \cos \theta}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta)} \exp \left\{ -y_1 \left( 1 + (w - \lambda \sin \theta)^2 \right) - y_0 (\rho_1 - \cos \theta) \right\}, \\ (f(w, y_1 | \theta) =) f(w, y_1 | \theta, y_0) &= \frac{f(\theta, w, y_1, y_0)}{f(\theta, y_0)} = \left( \int_0^{\infty} k_1(\theta, w) dw \right)^{-1} \exp \left( -\frac{y_1}{k_1(\theta, w)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \sin \theta) \right)} \exp \left\{ -y_1 \left( 1 + (w - \lambda \sin \theta)^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

これより, E-step は

$$\begin{aligned} E[Y_1 | \Theta = \theta] &= \frac{1}{2} + \frac{\lambda \sin \theta}{2\pi(1 + \lambda^2 \sin^2 \theta)G(\lambda \sin \theta)}, \\ E[Y_0 | \Theta = \theta] &= k_0(\theta; \rho), \\ E[Y_1 W | \Theta = \theta] &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{G(\theta)} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \lambda \sin \theta G(\theta) \right\} = \frac{1}{2\pi G(\lambda \sin \theta)} + \frac{\lambda}{2} \sin \theta. \end{aligned}$$

これらの準備の下, CaSSWC の単純な EM アルゴリズムを与えることが出来る. 詳細については当日報告する.

## Acknowledgements

Toshihiro Abe was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 19K11869 and 19KK0287 .

## 参考文献

- Abe, T. A simple EM algorithm for Cauchy-type distributions with applications to skew- $t$  distribution and its regression model. *Submitted for publication*.
- Abe, T. & Ley, C. (2017). A tractable, parsimonious and flexible model for cylindrical data, with applications. *Econometrics and Statistics* **4**, 91–104.
- Abe, T. & Pewsey, A. (2011). Sine-skewed circular distributions. *Statistical Papers* **52(3)**, 683–707.
- Azzalini, A. & Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **61(3)**, 579–602.
- Azzalini, A., & Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$ -distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **65(2)**, 367–389.
- Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2015). *Tables of integrals, series, and products*. 8th Edn., London: Academic Press.
- Jammalamadaka, S. R. & SenGupta, A. (2001). *Topics in circular statistics*. Vol. 5. world scientific.
- Kent, J. T. & Tyler, D. E. (1988). Maximum likelihood estimation for the wrapped Cauchy distribution. *Journal of Applied Statistics*, **15(2)**, 247–254.
- Mardia, K. V. & Jupp, P. E. (1999). *Directional statistics*. Vol. 494. John Wiley & Sons.
- Miyata, Y., Shiohama, T & Abe, T. Extended sine-skewed circular distributions, *Submitted for publication*