多変量確率密度関数の二重対称性について

東京理科大学 理工学部　　生亀清貴*

Tomizawa (1985) は二元分割表において二重対称モデル，準二重対称モデル，周辺二重対称モデルを提案し, 定理「二重対称モデルが成り立つための必要十分条件は，準二重対称モデルと周辺二重対称モデルの両方が成り立つことである」を与えた. Yamamoto et al. (2012) はこの定理を多元分割表に拡張した.

本講演では多変量確率密度関数に対して二重対称性, 準二重対称性と周辺二重対称性を定義し, 二重対称性をもつ確率密度関数の分解を与える.

確率変数 $(X_1,\dots,X_T)$ は確率密度関数 $f(x_1,\dots,x_T)$ をもつとする. ただし

$$f(x_1,\dots,x_T) > 0 \text{ for } (x_1,\dots,x_T) \in D^T,$$
$$f(x_1,\dots,x_T) = 0 \text{ for } (x_1,\dots,x_T) \notin D^T,$$

また

$$D^T = \{(x_1,\dots,x_T) \mid a_i < x_i < b_i;\ i = 1,\dots,T\},$$

ただし $a_i = -\infty$ かつ $b_i = +\infty$, または a_i, b_i は共に有限とする. $(c_1,\dots,c_T)$ を D^T 内の点とする, ただし a_i, b_i が共に有限の場合は $c_i = (a_i+b_i)/2$. また任意の i $(i = 1,\dots,T)$ に対して, $X_i = x_i$ のとき $x_i^* = 2c_i - x_i$ とおく.

確率密度関数 $f(x_1,\dots,x_T)$ の二重対称性を次のように定義する：$(1,\dots,T)$ の任意の並べ替え $(\pi_1,\dots,\pi_T)$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_T) &= f(x_{\pi_1},\dots,x_{\pi_T}) \\ &= f(x_1^*,\dots,x_T^*). \end{aligned}$$

また任意の k $(k = 1,\dots,T-1)$ に対して, k 次周辺二重対称性を次のように定義する：

$$\begin{aligned} f_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) &= f_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{\pi_{i_1}},\dots,x_{\pi_{i_k}}) \\ &= f_{X_{j_1}\dots X_{j_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) \\ &= f_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{i_1}^*,\dots,x_{i_k}^*) \\ (1 \le i_1 < \dots < i_k \le T; 1 \le j_1 &< \dots < j_k \le T), \end{aligned}$$

ただし $(\pi_{i_1},\dots,\pi_{i_k})$ は $(i_1,\dots,i_k)$ の任意の並べ替え, $f_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}$ は $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$ の周辺確率密度関数とする.

2010 Mathematics Subject Classification: 62H05
キーワード：二重対称性, 準二重対称性, 周辺二重対称性，確率密度関数, 分解
* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641
e-mail: iki@is.noda.tus.ac.jp

一般に, 確率密度関数は

$$f(x_1,\ldots,x_T)=\alpha\Big[\prod_{i_1=1}^{T}\alpha_{i_1}(x_{i_1})\Big]\Big[\prod\prod_{1\le i_1<i_2\le T}\alpha_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})\Big]\times\cdots$$
$$\times\Big[\prod\cdots\prod_{1\le i_1<\cdots<i_{T-1}\le T}\alpha_{i_1\ldots i_{T-1}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_{T-1}})\Big]\cdot\alpha_{1\ldots T}(x_1,\ldots,x_T), \qquad (1)$$

のように表すことが可能である, ただし $(x_1,\ldots,x_T)\in D^T$,

$$\{\alpha_i(c_i)=\alpha_{i_1i_2}(c_{i_1},x_{i_2})=\cdots=\alpha_{1\ldots T}(x_1,\ldots,x_{T-1},c_T)=1\}.$$

このとき, 確率密度関数 $f(x_1,\ldots,x_T)$ が二重対称であるための必要十分条件は, 式 (1) に次の制約を課すことである：

$$\begin{aligned}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})&=\alpha_{i_1\ldots i_m}(x_{\pi_{i_1}},\ldots,x_{\pi_{i_m}})\\&=\alpha_{j_1\ldots j_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})\\&=\alpha_{i_1\ldots i_m}(x^*_{i_1},\ldots,x^*_{i_m})\end{aligned}$$
$$(m=1,\ldots,T;1\le i_1<\cdots<i_m\le T;1\le j_1<\cdots<j_m\le T),$$

ただし $(\pi_{i_1},\ldots,\pi_{i_m})$ は $(i_1,\ldots,i_m)$ の任意の並べ替え. 任意の k $(k=1,\ldots,T-1)$ に対して, $f(x_1,\ldots,x_T)$ の k 次準二重対称性を次のように定義する：式 (1) に対して,

$$\begin{aligned}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})&=\alpha_{i_1\ldots i_m}(x_{\pi_{i_1}},\ldots,x_{\pi_{i_m}})\\&=\alpha_{j_1\ldots j_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})\\&=\alpha_{i_1\ldots i_m}(x^*_{i_1},\ldots,x^*_{i_m})\end{aligned}$$
$$(m=k+1,\ldots,T;1\le i_1<\cdots<i_m\le T;1\le j_1<\cdots<j_m\le T),$$

ただし $(\pi_{i_1},\ldots,\pi_{i_m})$ は $(i_1,\ldots,i_m)$ の任意の並べ替え.

このとき, 次の定理を得る.

定理： 任意の固定された k に対して $(k=1,\ldots,T-1)$, 確率密度関数 $f(x_1,\ldots,x_T)$ が二重対称性を満たすための必要十分条件は, $f(x_1,\ldots,x_T)$ が k 次準二重対称性と k 次周辺二重対称性の両方を満たすことである.

参考文献

[1] Tomizawa, S. (1985). Double symmetry model and its decomposition in a square contingency table. *Journal of the Japan Statistical Society*, **15**, 17-23.

[2] Yamamoto, K., Takahashi, F. and Tomizawa, S. (2012). Double symmetry model and its orthogonal decomposition for multi-way tables. *SUT Journal of Mathematics*, **48**, 83-102.