2004年度数理統計学期末試験略解/担当:星野

- このハンドアウトは `http://www.ec.kanazawa-u.ac.jp/hoshino/` より取得可能。

1. (20点)

   (a) i 回目に出た目を i 番目とする文字列で標本点を表すと、
   $(11), (22), \ldots, (66), (111), (211), \ldots, (611), (122), (222), \ldots$
   のように無限に続く。最後の二文字が同じになる事に注意。正解はこれらを要素とする空間。

   (b) この実験は2回目以降の各回で $1/6$ の確率で終了する事に注意。つまり $n \geq 2$ について

   $$\begin{aligned}\Pr(n) &= \Pr(n\text{ 回目に前回と同じ目が出た}|n-1\text{ 回まで続いた})\Pr(n-1\text{ 回まで続いた}) \\ &= \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^{n-2}.\end{aligned}$$

   また $n = 1$ の確率は 0 である。

2. (40点)

   (a) $n-1$ 個の箱にボールが入り続けるのだから、$p_n = (n-1)^n/n^n$.

   (b) 次の結果は良く使われるとして授業で紹介したはず。

   $$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = \exp(-1).$$

   (c) 組み合わせの問題で混乱したら、n が小さい場合で考えてみると良い。例えば $n = 3$ ならば、各箱のボール数を並べて書けば $120, 210, 012, 021, 102, 201$ の $2 \times 3 = 6$ 通りである。3項分布でこのように配られる確率はそれぞれ

   $$\frac{3!}{1! \cdot 2! \cdot 0!}\frac{1}{3^3}$$

   で等しいので $n = 3$ の時、

   $$q_3 = 3 \times 2 \times \frac{3!}{1! \cdot 2! \cdot 0!}\frac{1}{3^3}.$$

   そして $n = 4$ ならば $1210, 2110, 1120, \ldots$ の 3×4 通りがあり、4項分布なので

   $$q_4 = 4 \times 3 \times \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 0!}\frac{1}{4^4}.$$

   一般に

   $$q_n = n(n-1)\frac{n!}{2!}\frac{1}{n^n}.$$

   (d) $p_n \times n^n$ と $q_n \times n^n$ の大小を比較する。結局、$(n-1)^{n-1}$ と $nn(n-1)(n-2)\cdots 3$ を比較すれば良い。後者も $n-1$ 項の積となっている事に注意。これを見ると n が大きくなるにつれて前者が後者を上回る事が分かる。なお正解は $n \geq 6$ となる。

3. (30点)

(a) ポアソン分布の二次モメントの導出を宿題でやったが、それと同じ方法が使える。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} p^r (1-p)^x \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1)+x) \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} p^r (1-p)^x \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(r+x-1)!}{(x-2)!(r-1)!} p^r (1-p)^x + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(r+x-1)!}{(x-1)!(r-1)!} p^r (1-p)^x \\
&= \frac{(1-p)^2(r+1)r}{p^2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{(r+x-1)!}{(x-2)!(r+1)!} p^{r+2} (1-p)^{x-2} \\
&\quad + \frac{(1-p)r}{p} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(r+x-1)!}{(x-1)!r!} p^{r+1} (1-p)^{x-1} \\
&= \frac{(1-p)^2(r+1)r}{p^2} + \frac{(1-p)r}{p}.
\end{aligned}
$$

最後の行で、確率の総和が 1 となる事を利用している。

(b) 二項分布の極限としてポアソン分布を導出した方法と同じ。$1-p=\lambda/r$ なので

$$\Pr(x) \sim \frac{\lambda^x}{x!}(1-\frac{\lambda}{r})^r \to \frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda).$$

(c) 確率 $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X=0)$ に注意。条件付き確率の定義より

$$\Pr(X=x|X \geq 1) = \Pr(X=x)/\Pr(X \geq 1) = \Pr(X=x)/(1-p^r).$$

4. (10 点) まず $2n$ 回中 n 回表が出る確率は

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}}$$

である。ここでスターリングの公式を使って階乗の部分を置き換えよ。

—

以上。