

数理統計期末試験

2004年7月29日；担当 星野

1. 歪んでいない六面体さいころを、同じ結果が二度続けて出るまで投げ続ける。
 - (a) 標本空間を記述せよ。
 - (b) ちょうど n 回投げて実験が終了する確率を求めよ。
2. n 個のボールを n 個の箱にランダムに入れる。ボールが各箱に入る確率は全て等しい ($1/n$) とする。
 - (a) 一番目の箱に一つもボールが入らない確率 p_n を求めよ。
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。
 - (c) ちょうど一個の箱（どの箱でも可）が空となる確率 q_n を求めよ。
 - (d) $q_n \leq p_n$ となる n の範囲を求めよ。
3. 負の二項分布に従う確率変数 X の確率関数は、 $0 < p \leq 1, r > 0$ について

$$\Pr(X = x; r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

で表される。以下の問い合わせよ。

- (a) $\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \Pr(X = x; r, p)$ を求めよ。
 - (b) $r(1-p) = \lambda$ が一定となるように $r \rightarrow \infty, p \rightarrow 1$ とした場合、 X の極限分布を示せ。
 - (c) 条件付き確率 $\Pr(X = x | X \geq 1)$ を求めよ。
4. 歪んでいないコインを $2n$ 回投げるとする。 n 回表が出る確率を h_n と書く。 $n \rightarrow \infty$ の時、

$$h_n \sim (\pi n)^{-\frac{1}{2}}$$

を示せ。

――

以上。